Probeklausur „Lineare Algebra I“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/11
8. Februar 2011

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punktzahl	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punktzahl							

Bitte beachten Sie: Geben Sie nicht nur Endergebnisse an, sondern auch den Lösungsweg. Die maximal mögliche Punktzahl wird nur auf vollständig richtig begründete Lösungen mit klar ersichtlichem Lösungsweg vergeben.

Diese Probeklausur können Sie wahlweise wie ein normales Übungsblatt oder eigenständig als Test ihres aktuellen Leistungsstandes bearbeiten.
Wenn Sie wissen möchten, wie Sie in dieser Klausur abgeschnitten hätten können Sie ihre Lösungen von ihrem Übungsleiter korrigieren lassen.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.

Gehen Sie in der richtigen Klausur wie folgt vor:
Füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts am Anfang der Klausur in Blockschrift (Großbuchstaben) aus.
Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und nummerieren Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

In der Klausur werden als Hilfsmittel alle schriftlichen Unterlagen zugelassen sein. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Viel Erfolg!

Die Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (Lineare Abbildungen) (10 Punkte)

Sei eine Abbildung $\varphi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^3$ definiert durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 - x_5 \\ \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 \\ 8x_2 + x_3 - x_5 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{Q}^5$ gilt. **2P.**

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kernes und des Bildes der linearen Abbildung φ. **6P.**

(c) Bestimmen Sie den Rang von φ. **2P.**

2. Aufgabe (Untervektorräume) (10 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^3$ sind ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antworten und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Basis von U.

(a)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + 5x_2 = 0 \right\};$$

(b)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = 1 \right\}.$$

10 P.

3. Aufgabe (Matrizen zu linearen Abbildungen) (10 Punkte)

Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Sei $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$. Seien e_1, e_2, e_3, e_4 die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^4$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$B = (e_1,\ e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$$

eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist. **3P.**

(b) Zeigen Sie, dass

$$C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist. **3P.**

(c) Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi]^B_C$ von φ bezüglich der Basen B und C. **4P.**

4. Aufgabe (Matrizen) (10 Punkte)

Welche der folgenden reellen 3×3-Matrizen sind invertierbar? Begründen Sie Ihre Antworten und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10P.

5. Aufgabe (Verschiedenes) (10 Punkte)

(a) Sei $\varphi : \mathbb{R}^{21} \to \mathbb{R}^7$ eine surjektive lineare Abbildung. Berechnen Sie die Dimension des Kernes von φ. **5P.**

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Für jede invertierbare $n \times n$-Matrix S gilt $\mathrm{tr}(S^{-1}) = \mathrm{tr}(S)^{-1}$. **5P.**

6. Aufgabe (Vektorräume und lineare Abbildungen) (10 Punkte)

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und sei $\varphi : V \to V$ ein linearer Endomorphismus, für den $\varphi \circ \varphi = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass dann

$$\operatorname{rank} \varphi \leq \frac{1}{2} \dim V$$

gilt. **5P.**

(b) Sei V ein Vektorraum und seien U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V. Zeigen Sie: Gilt $V = U_1 \oplus U_2$, so ist V/U_2 isomorph zu U_1. **5P.**