Klausuraufgaben

Aufgabe 1 Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 \\ -2x_1 - x_3 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Matrix von φ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ an und bestimmen Sie eine Basis des Bildes von φ. Welchen Rang hat φ? Ist φ invertierbar? Welche Dimension hat der Kern von φ?

Aufgabe 2 Welche der folgenden reellen 3×3–Matrizen sind invertierbar?.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie Ihre Antworten. Berechnen Sie gegebenfalls die inverse Matrix.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie: Die Vektoren

$$b_1 := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Sei eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 11x_1 + 12x_2 + 6x_3 \\ -5x_1 - 5x_2 - 3x_3 \\ -3x_1 - 4x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix $[\varphi]_B$ dieses Endomorphismus bezüglich der Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$.

Aufgabe 4 Seien $u_1, \ldots, u_m$ Elemente eines Vektorraums. Zeigen Sie: Die Vektoren

$$v_k := \sum_{j=1}^{k} u_j, \quad k = 1, \ldots, m,$$

sind genau dann linear abhängig, wenn $u_1, \ldots, u_m$ linear abhängig sind.

Aufgabe 5 Sei $U \subseteq \mathbb{C}^4$ der Untervektorraum bestehend aus allen Vektoren $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{C}^4$, welche die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & -ix_3 & -ix_4 & = 0, \\ ix_1 & & +x_3 & & = 0, \\ & x_2 & & -ix_4 & = 0. \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von U.

(b) Sei W der von $(1,0,0,0)^T$ und $(0,1,0,0)^T$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{C}^4$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^4 = U \oplus W$ gilt.

(c) Begründen Sie, warum es eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ gibt mit $\varphi(u) = u$ für alle $u \in U$ und $\varphi(w) = -w$ für alle $w \in W$.

Aufgabe 6

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^7$ mit $\dim(\ker(\varphi)) = 4$ und $\operatorname{rank}(\varphi) = 3$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine invertierbare komplexe 3×3–Matrix A mit $\operatorname{tr}(A) = 0$.

(c) Sei $V = M_2(\mathbb{C})$ der Vektorraum der komplexen 2×2–Matrizen. Welche der folgenden Abbildungen $V \to \mathbb{C}$ sind linear?

$$(a) \quad A \mapsto \det(A), \qquad (b) \quad A \mapsto \operatorname{tr}(A), \qquad (c) \quad A \mapsto \operatorname{rank}(A).$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

(d) Sei $G = (\mathbb{R}^n, +)$ die Gruppe bestehend aus allen Vektoren im $\mathbb{R}^n$ mit der Vektoraddition als Verknüpfung. Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen Untergruppen von G sind:

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 1\}, \\ B &= \{(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \ldots, x_n > 0\}, \\ C &= \{(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Begründen Sie Ihre Antworten.