Analysis II für M, LaG/M, Ph
15. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
18.02.2011

Gruppenübung

Aufgabe G15.1

(a) Zeigen Sie, dass die Einheitskugel als grüner Bereich (S,V) des Raumes verstanden werden kann.

(b) Sei $H = [0,\pi] \times [0,2\pi]$ und $\psi(\theta,\varphi)$ die (Physiker)-Kugelkoordinaten. Ist (ψ,H) eine grüne Parametrisierung von (S,V)?

(c) Sei F auf V stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\int_{(\psi,H)^\perp} F = \int_V \mathrm{div} F.$$

Lösung:

(a) Vgl. Vorlesung und Hausübung.

(b) Nein, es ist nicht treu.

(c) Benutze Kor.27.14 der Vorlesung: Betrachte Rechtecke

$$[(\varepsilon,\varepsilon)^t, (2\pi-\varepsilon, \pi-\varepsilon)^t].$$

⊣

Aufgabe G15.2

(a) Sei V ein Torus(volumen). Zeigen Sie, dass es einen grünen Bereich (S,V) gibt.

(b) Bestimmen Sie die Flächeninhalte F der Tori S.

Lösung:

(a) Salamitaktik: schneide den Torus durch radiale Schnitte im großen Radius in Scheiben, zerlege diese durch radiale Schnitte im kleinen Radius in mundgerechte Stücke - die sehen den Melonenstücken ziemlich ähnlich. Argumentiere wie für diese.

(b) Zweite Guldinsche Regel: Satz 27.15: Die Torusfläche ist die Rotationsfläche, die durch Rotation einer Kreislinie mit Zentrum S und Radius r um eine zu dieser Kreisscheibe paralle Achse mit Abstand $R > r$ von S entsteht. Nach Guldin gilt

$$F = 4\pi^2 Rr.$$

⊣

Aufgabe G15.3

Bzgl, eines pos.or. ON-Koordinatensystems α des Raumes betrachten wir

$$C = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ und } x+y+z \geq 1\}.$$

(a) Welche Voraussetzungen für K und ϕ mit $C = \phi(K)$ müssen erfüllt sein, damit man den Satz von Stokes auf (ϕ, K) anwenden kann?

(b) Bestimmen Sie solche K und ϕ.

(c) Bestimmen Sie die Werte der zugehörigen Integrale aus dem Satz von Stokes für $\vec{F}$ die Identität bzw. $\vec{F}$ die 90^o-Drehung um die Achse $\vec{a}$ mit Koordinaten $\vec{a}^\alpha = (1,1,1)^t$.

(d) Sei nun K die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und auf K definiert

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\vec{F} = \mathrm{grad} f$. Bestimmen Sie einen C^1-Weg Γ, dessen Spur der Rand von $\phi(K)$ ist und das Wegintegral

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

Lösung:

(a) Siehe Skript.

(b) Für passendes Koo.syst. ist C die Kappe der Einheitskugel über der zur 2-3-Ebene parellelen Ebene mit Abstand $\sqrt{3}/3$ und $\vec{a} = \vec{e}_1$. Der Rand von C ist also der Kreis in dieser Ebene mit Mittelpunkt auf 1-Achse und Radius $r < 1$, den man mithilfe eines bekannen griechischen Musikers bestimmt. Also kann man als (γ, K) die Kreislinie/flaeche in der $2-3$-Ebene mit Zentrum 0 und Radius r nehmen und als ϕ die Kugelkoordinaten auf dem Kreis mit Radius $r + \varepsilon$.

(c) (1) $\mathrm{rot}\,\mathtt{id} = 0$, also auch Integrale $= 0$.

(2) Im zweiten Fall wirkt $\vec{F}$ in der Ebene als Rotation mit Winkelgeschwindigkeit 2, also hat man das Wegintegral längs des Kreises: $2\pi r^2$ und das ist der Wert der Integrale im Satz von Stokes.

(d) Da $\vec{F}$ ein Gradientenfeld ist, gilt $\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{0}$ aber Stokes ist nicht auf (ϕ, K) anwendebar, da es keine Parametrisierung ist - die Ableitung existiert nicht für $x^2 + y^2 = 1$ und Lipshitzstetigkeit im Inneren ist auch nicht gegeben.

Als Weg Γ eignet sich

$$\Gamma: \ \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Das gesuchte Wegintegral ist

$$I := \int_0^{2\pi} \vec{F}(\phi(\gamma(t))) \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}\,\mathrm{d}t.$$

Für $x^2 + y^2 < 1$ sei $N(x,y)$ das Vektorprodukt der Spalten von $J_\phi(x,y)$, sonst der Nullvektor. Seien K_r der Kreis um 0 mit Radius $r < 1$, $\phi_r = \phi|K_r$ und γ_r die Parametrisierung der Kreislinie in Polarkoordinaten. Dann ist (ϕ_r, K_r) eine treue Parametrisierung und ϕ_r in C^2. Nun nach Stokes

$$0 = \int_{(\phi_r, K_r)} \mathrm{rot}\vec{F} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\phi_r(\gamma_r(t))) \cdot \frac{\partial \gamma_r}{\partial t}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 1-r \end{pmatrix}) \cdot r \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}\,\mathrm{d}t =: I_r$$

Es gilt

$$|I - I_r| \leq \int_0^{2\pi} |\vec{F}(\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}) - r \cdot \vec{F}(\begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 1-r \end{pmatrix})|\,\mathrm{d}t.$$

Nach der gleichmäßige Stetigkeit von $\vec{F}$ auf der Kompakten Menge $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ folgt, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|\vec{F}(\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}) - r \cdot \vec{F}(\begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 1-r \end{pmatrix})| < \varepsilon$$

für alle $|1-r| < \delta$. Also für alle $\varepsilon > 0$ gibt ein $\delta > 0$ mit

$$|I - I_r| \leq 2\pi \cdot \varepsilon,$$

für alle $|1-r| < \delta$. D.h.

$$I = \lim_{r \to 1} I_r = 0.$$

$\dashv$