Analysis II für M, LaG/M, Ph
14. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
11.02.2011

Gruppenübung

Aufgabe G14.1
Gegeben die folgende Parametrisierung einer Fläche des Raumes

$$\phi : (u,v) \mapsto (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v), \qquad 0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le \frac{\pi}{2},$$

bestimmen Sie die Spur$(\phi, [0,2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}])$. Bestimmen Sie die normalen Einheitsvektoren $n_\phi(u,v)$ für alle $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

Lösung:

Es gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 v = \sin^2 v(\cos^2 u + \sin^2 u) + \cos^2 v = \sin^2 v + \cos^2 v = 1.$$

Die Menge $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ ist die Fläche der Einheitssphäre $V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$. Da $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$, kann z keine negative Werte annehmen. Also

$$\text{Spur}(\phi, [0,2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]) = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ und } z \ge 0\}.$$

Nun bestimmen wir den normalen Einheitsvektor $n(u,v)$.

$$\begin{aligned} N_\phi(u,v) &= (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})\Big|_{(u,v)} \times (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})\Big|_{(u,v)} \\ &= (-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0) \times (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v) \\ &= -(\cos u \sin^2 v, \sin u \sin^2 v, \cos^2 u \cos v \sin v + \sin^2 u \sin v \cos v) \\ &= -\sin v \cdot (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v). \end{aligned}$$

$|N_\phi(u,v)| = |-\sin v| = \sin v$, weil $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$. Also

$$n_\phi(u,v) = \frac{N_\phi(u,v)}{|N_\phi(u,v)|} = -(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v).$$

$\dashv$

Aufgabe G14.2 (Gesetz von Faraday)
Seien (Γ, K) ein grüner Bereich der Ebene, G öffnen mit $K \subseteq G$ und $\phi : G \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Ferner sei $E(t,x,y,z)$ das elektrisches Feld und $H(t,x,y,z)$ das Magnetfeld am Punkt (x,y,z) im Augenblick t, wobei $x,y,z \in \mathbb{R}$ und $t \ge 0$. Gegeben, dass die Funktionen E und F C^1 sind, zeigen Sie das Gesetz von Faraday

$$\int_{\phi \circ \Gamma} E(x,y,z,t) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = -\frac{\partial}{\partial t} \int_K H(\phi(u),t) \cdot N_\phi(u)$$

für alle $t \ge 0$.

Hinweis. Nach einem Gesetz der Theorie vom Elektromagnetismus gilt $\text{rot}E(x,y,z,t) = -\frac{\partial H}{\partial t}(x,y,z,t)$.

Lösung:

Nach dem Satz von Stokes folgt

$$
\begin{aligned}
\int_{\phi\circ\Gamma} E(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_K \mathrm{rot}E(\phi(u),t)\cdot N_\phi(u) \\
&= -\int_K \frac{\partial H}{\partial t}(\phi(u),t)\cdot N_\phi(u) \qquad \text{(nach dem Hinweis)} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\int_K H(\phi(u),t)\cdot N_\phi(u) \qquad \text{(da } H \text{ eine } C^1 \text{ Funktion ist)}
\end{aligned}
$$

⊣

Aufgabe G14.3

Gegeben das Vektorfeld $F(x,y,z) = (2x, y^2, z^2)$, $x,y,z\in\mathbb{R}$, und die Kugel $V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 1\}$ bestimmen Sie das Integral $\int_V \mathrm{div}F$.

Lösung:

Es gilt

$$\int_V \mathrm{div}F = 2\int_V (1+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Das Integral $\int_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ist der Raumbereich von der Kugel V, also gilt $2\int_V d(x,y,z) = \frac{8\pi}{3}$. Nun zeigen wir, dass $I_2 := \int_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$ und $I_3 := \int_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$. Wir betrachten die Kugelkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\quad y = r\sin\varphi\sin\theta,\quad z = r\cos\theta,\quad r\in[0,1],\ \varphi\in[0,2\pi],\ \theta\in[0,\pi].$$

Daher

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r\sin\varphi\sin\theta\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= -\int_0^1\int_0^\pi r^3\sin^2\theta\cdot\cos\varphi\big|_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= -\int_0^1\int_0^\pi 0\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 0,
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\int_0^1\int_0^\pi r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \pi\int_0^1\int_0^\pi r^3\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \qquad (\text{da } \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta) \\
&= -\pi\int_0^1 r^3\cdot\frac{\cos 2\theta}{2}\big|_0^\pi\mathrm{d}r \\
&= -\pi\int_0^1 0\mathrm{d}r = 0.
\end{aligned}
$$

Deshalb

$$\int_V \mathrm{div}F = 2\int_V (1+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{8\pi}{3}.$$

⊣

Hausübung

Aufgabe H14.1 (6 Punkte)
Gegeben die folgende Parametrisierung einer Fläche des Raumes

$$\phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u), \quad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 2\pi,$$

bestimmen Sie die Spur$(\phi, [0,1]\times[0,2\pi])$. Bestimmen Sie den Normalenvektor $N_\phi(0,0)$.

Lösung:

Es gilt

$$x^2 + y^2 = u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v = u^2 = z^2.$$

Da $z = u \in [0,1]$, folgt, dass $z = \sqrt{x^2+y^2} \le 1$. Da $0 \le v \le 2\pi$, können x und y alle Werte annehmen. Also

$$\mathrm{Spur}(\phi, [0,1]\times[0,2\pi]) \;=\; \{(x,y,z) \mid z^2 = x^2+y^2 \text{ und } 0 \le z \le 1\}.$$

Nun bestimmen wir den Normalenvektor im $(0,0)$.

$$\begin{aligned}
N_\phi(0,0) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)\Big|_{(0,0)} \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)\Big|_{(0,0)} \\
&= (\cos 0, \sin 0, 1) \times (0(-\sin 0), 0\cos 0, 0) \\
&= (1,0,1) \times (0,0,0) = 0.
\end{aligned}$$

⊣

Aufgabe H14.2 (6 Punkte)
Sei $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$, $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $\phi : K \to \mathbb{R}^3 : \phi(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$, und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (x,y,z)$. Welche Spur hat die Parametrisierung (ϕ, K)? Verifizieren Sie den Satz von Stokes für die Parametrisierung (ϕ, K) und für den grünen Bereich (γ, K), d.h. zeigen Sie, dass

$$\int_K \mathrm{rot}F(\phi(u)) \cdot N_\phi(u) = \int_{\phi\circ\gamma} F\,\mathrm{d}\vec{x}.$$

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spur}(\phi, K) &= \{\phi(x,y) \mid (x,y) \in K\} \\
&= \{(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \mid x^2+y^2 \le 1\} \\
&= \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ und } z \ge 0\}.
\end{aligned}$$

Nun müssen wir zeigen, dass

$$\int_K \mathrm{rot}F(\phi(u)) \cdot N_\phi(u) = \int_\Gamma F\,\mathrm{d}\vec{x}.$$

wobei $\Gamma = \phi \circ \gamma$. Es ist einfach abzugleichen, dass $\mathrm{rot}F = 0$. Also gilt $\int_K \mathrm{rot}F(\phi(u)) \cdot N_\phi(u) = 0$. Für alle $t \in [0,2\pi]$ gilt $\Gamma(t) = \phi(\gamma(t)) = \phi(\cos t, \sin t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Daher

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma F\,\mathrm{d}\vec{x} &= \int_0^{2\pi} F(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 0) \cdot \Gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} -\sin t\cos t + \sin t\cos t + 0\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} 0\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}$$

⊣

Aufgabe H14.3 (6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : f(x,y,z) = x^2 + y + z$ und $n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : n(x,y,z) = (x,y,z)$.

(a) Bestimmen Sie ein Vektorfeld $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $f(x,y,z) = F(x,y,z) \cdot n(x,y,z)$, für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie das Integral $\int_V \operatorname{div} F$, wobei F das Vektorfeld aus (a) ist, das Sie bestimmt haben und $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(c) Sei das Vektorfeld F aus (a), das Sie bestimmt haben. Betrachten Sie die folgende Parametrisierung:
$$\phi : [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R} : \phi(u,v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v).$$
Bestimmen Sie das Integral
$$I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\phi(u,v)) \cdot n(\phi(u,v)) \cdot |N_\phi(u,v)| \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$
wobei $N_\phi(u,v)$ der Normalenvektor im (u,v) ist.

Hinweis. Der Normalenvektor wird in G14.1 bestimmt; nach (a) folgt $F \cdot n = f$; es gilt $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ und
$$\int \sin^3 x \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \cos^3 x - \cos x.$$

Lösung:

(a) Für alle Vektorfelder $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt
$$F(x,y,z) \cdot n(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)_{(x,y,z)} \cdot (x,y,z) = xF_1(x,y,z) + yF_2(x,y,z) + zF_3(x,y,z).$$
Um $f(x,y,z) = F(x,y,z) \cdot n(x,y,z)$ zu haben, muss es
$$x^2 + y + z = xF_1(x,y,z) + yF_2(x,y,z) + zF_3(x,y,z)$$
sein. Man wähle
$$F_1(x,y,z) = x, \quad F_2(x,y,z) = 1, \quad F_3(x,y,z) = 1, \quad x,y,z \in \mathbb{R}.$$

(b) Nach (a) folgt
$$\int_V \operatorname{div} F = \int_V 1 \cdot \mathrm{d}V = \frac{4\pi}{3}.$$

(c) Nach G14.1 folgt $|N_\phi(u,v)| = \sin v$ und nach (a) folgt
$$F(\phi(u,v)) \cdot n(\phi(u,v)) = f(\phi(u,v)) = f(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)) = \cos^2 u \sin^2 v + \sin u \sin v + \cos v.$$
Es folgt
$$I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\cos^2 u \sin^3 v + \sin u \sin^2 v + \cos v \sin v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v =: I_1 + I_2 + I_3.$$
Es gilt $I_2 = I_3 = 0$ und deshalb
$$I = I_1 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 u \sin^3 v \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$
Nun bestimmen wir das integral $J := \int_0^{2\pi} \cos^2 u \mathrm{d}u$. Nach dem Hinweis gilt
$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2u)}{2} \mathrm{d}u \\ &= \frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}\Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi. \end{aligned}$$
Also $I = \pi \int_0^\pi \sin^3 v \mathrm{d}v$. Nach dem Hinweis folgt
$$I = \pi \cdot (\frac{1}{3} \cdot \cos^3 v - \cos v)\Big|_0^\pi = \frac{4}{3} \cdot \pi.$$

⊣

Aufgabe H14.4 (12 Punkte)
Zeigen Sie, dass man die Einheitssphäre mit ihrem Volumen als grüner Bereich verstehen kann.