Analysis II für M, LaG/M, Ph
13. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
4.2.2011

Gruppenübung

Aufgabe G13.1
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche A, die von den Kurven

$$X_1(t) = (t, \frac{4}{3\pi}t)^T, t \in [0, 3\pi], \quad X_2(t) = (t, 4 + \sin(t))^T, t \in [0, 3\pi],$$
$$X_3(t) = (0, t)^T, \quad t \in [0, 4]$$

eingeschlossen wird. Verwenden Sie hierzu den Satz von Gauß in der Ebene. Fertigen Sie auch eine Skizze an.

Lösung: Es gilt

$$X_1'(t) = (1, \frac{4}{3\pi})^T, \quad X_2'(t) = (1, \cos(t))^T, \quad X_3'(t) = (0, 1)^T.$$

Wir berechnen (Achtung: Es muss die Orientierung der Kurven beachtet werden!)

$$\begin{aligned} 2|A| &= \int_0^{3\pi} (-\frac{4}{3\pi}t, t)(1, \frac{4}{3\pi})^T \,\mathrm{d}t + \int_{3\pi}^0 (-4 - \sin(t), t)(1, \cos(t))^T \,\mathrm{d}t + \int_4^0 (-t, 0)(0, 1)^T \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{3\pi} -\frac{4}{3\pi}t + \frac{4}{3\pi}t \,\mathrm{d}t + \int_{3\pi}^0 -4 - \sin(t) + t\cos(t) \,\mathrm{d}t + \int_4^0 0 \,\mathrm{d}t = 4 + 12\pi \end{aligned}$$

Aufgabe G13.2
Es sei $a > 0$. Durch die Menge $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)\}$ ist implizit eine Kurve definiert, die Lemniskate. Die beiden "Flügel" lassen sich parametrisieren durch

$$z_1(t) = a \begin{pmatrix} \sqrt{\cos(2t)}\cos(t) \\ \sqrt{\cos(2t)}\sin(t) \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$$

bzw.

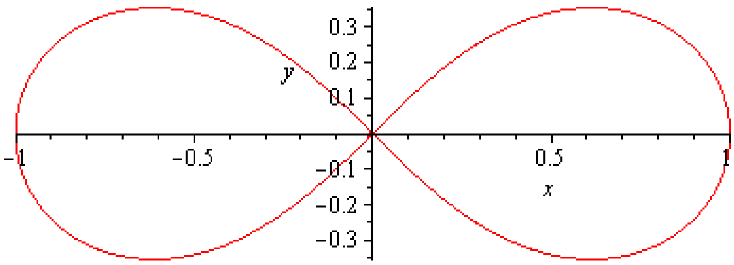
$$z_2(t) = a \begin{pmatrix} \sqrt{\cos(2t)}\cos(t) \\ \sqrt{\cos(2t)}\sin(t) \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$$

(a) Skizzieren Sie die Lemniskate

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes den Flächeninhalt der Fläche, die von der Lemniskate berandet wird. Betrachten Sie hierzu die Funktion $f(x, y) = (x, 0)$.

Lösung:

(a)



Die Lemniskate für a=1

(b) Für die Paremetrisierung von z_1 gilt:

$$x'(t) = -a\left(\frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}}\sin(2t)\cos(t) + \sqrt{\cos(2t)}\sin(t)\right)$$
$$y'(t) = a\left(-\frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}}\sin(2t)\sin(t) + \sqrt{\cos(2t)}\cos(t)\right)$$

Der Normalenvektor $(y'(t), -x'(t))$ zeigt ins Äußere der Fläche D. Außerdem ist die Fläche symmetrisch zur y-Achse. Das heißt, es genügt, den Flächeninhalt des z_1-Teils (nennen wir ihn D_1 zu berechnen. Es gilt

$$
\begin{aligned}
|D| = 2|D_1| = 2\int_{D_1} \mathrm{d}(x,y) = 2\int_{D_1} \operatorname{div}(x,0)\,\mathrm{d}(x,y) \\
&\overset{\text{Gauss}}{=} 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\sqrt{\cos(2t)}\cos(t)\left(-\frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}}\sin(2t)\sin(t) + \sqrt{\cos(2t)}\cos(t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= 2a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(-\sin(2t)\sin(t)\cos(t) + \cos(2t)\cos^2(t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= 2a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} -2\sin^2(t)\cos^2(t) + \cos(2t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2(t)\left(\cos(2t) - 2\sin^2(t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= 2a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2(t)\left(2\cos^2(t) - 2\sin^2(t) - 1\right)\,\mathrm{d}t \\
&= 2a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\cos^4(t) - 2(\cos(t)\sin(t))^2 - \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\cos^4(t) - \frac{1}{2}\sin(2t) - \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2a^2\left[\frac{1}{2}\sin(t)\cos^3(t) + \frac{3}{4}\sin(t)\cos(t) + \frac{3}{4}t - \frac{1}{2}(t + \sin(t)\cos(t)) - \frac{1}{4}\cos(2t)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= a^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe G13.3

Es sei G das Gebiet, das zwischen den Kurven $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 4\}$ liegt. Berechnen Sie mit dem Satz von Green das Kurvenintegral

$$\int_{\partial G} (e^x - y)\,\mathrm{d}x + (\sin y + x)\,\mathrm{d}y.$$

Lösung: Es gilt mit $P = (e^x - y)$ und $Q = (\sin y + x)$, dass $P_y = -1$ und $Q_x = 1$. Damit folgt

$$\int_{\partial G} (e^x - y)\,\mathrm{d}x + (\sin y + x)\,\mathrm{d}y = \int_G (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_G 2\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} 8 - 2x^2\,\mathrm{d}x = \frac{64}{3}.$$

Hausübung

Aufgabe H13.1 (6 Punkte)
Sei $R > 0$ und

$$B_R = \left\{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le R, \frac{1}{x} \le y \le \sqrt{x} \right\}.$$

Skizzieren Sie B_R und berechen Sie den Flächeninhalt von B_R einmal direkt und einmal mit Hilfe des Gaußschen Satzes in der Ebene.

Lösung: Direkt:

$$|B_R| = \int\limits_1^R \int\limits_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^R x^{\frac{1}{2}} - x^{-1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \log(x)\Big|_1^R = \frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}} - \log(R) - \frac{2}{3}.$$

Gauß:
Eine Parametrisierung des Randes von B_R is gegeben durch

$$\begin{aligned} X_1(t) &= (t, t^{-1})^T, \quad t \in [1,R] \\ X_2(t) &= (R,t), \quad t \in [R^{-1}, R^{\frac{1}{2}}] \\ X_3(t) &= (t, t^{\frac{1}{2}})^T, \quad t \in [R,1]. \end{aligned}$$

Es gilt

$$X_1'(t) = (1, -t^{-2})^T, \quad X_2'(t) = (0,1)^T, \quad X_3'(t) = (1, \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}})^T.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} 2|B_R| &= \int\limits_1^R (-t^{-1}, t)^T (1, t^{-2})^T\,\mathrm{d}t + \int\limits_{R^{-1}}^{R^{\frac{1}{2}}} (-t, R)^T (0,1)^T\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int\limits_R^1 (-t^{\frac{1}{2}}, t)^T (1, \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}})^T\,\mathrm{d}t \\ &= -\int\limits_1^R 2t^{-1}\,\mathrm{d}t + \int\limits_{R^{-1}}^{R^{\frac{1}{2}}} R\,\mathrm{d}t - \int\limits_R^1 \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = -2\log(R) + \frac{4}{3}R^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe H13.2 (6 Punkte)
Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein grüner Bereich. Die Funktionen h und g seien reellwertig und zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von G.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\partial G} g\nabla h \cdot \vec{n} - h\nabla g \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s = \int_G g\Delta h - h\Delta g\,\mathrm{d}(x,y).$$

Hierbei bezeichnet $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ den Laplaceoperator und $\vec{n}$ die äußere Normale an G.

(b) Zeigen Sie: Ist g harmonisch, d.h. $\Delta g = 0$ so gilt

$$\int_{\partial G} \nabla g \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}s = 0$$

Lösung:

(a) Zunächst beobachten wir, dass $\Delta h = \operatorname{div} \nabla h$ gilt. Dann benötigen wir noch die Identität $\operatorname{div}(h \nabla g) = \nabla h \cdot \nabla g + h \operatorname{div} \nabla g = \nabla h \cdot \nabla g + h \Delta g$, die aus der Produktregel folgt. Daher liefert der Satz von Gauß

$$\int_G \nabla h \cdot \nabla g + h \Delta g \, \mathrm{d}x = \int_G \operatorname{div}(h \nabla g) = \int_{\partial G} h \nabla g \cdot n \, \mathrm{d}s$$

und analog durch vertauschen der Rollen von h und g

$$\int_G \nabla h \cdot \nabla g + g \Delta h \, \mathrm{d}x = \int_G \operatorname{div}(g \nabla h) = \int_{\partial G} g \nabla h \cdot n \, \mathrm{d}s.$$

Subtrahieren der beiden Gleichungen liefert die Behauptung.

(b) Dies folgt aus (a) mit $h \equiv 1$.

Aufgabe H13.3 (6 Punkte)
Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds v mit $v(x, y) = (x^3, 0)$ durch den Rand des Kreises K um den Ursprung mit Radius 2. Bestimmen Sie also

$$\int_{\partial K} v \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}s.$$

Berechnen Sie einmal das Integral direkt und einmal unter Verwendung des Gaußschen Satzes.

Lösung: Direkt:
Die Normale an einem Kreis um den Ursprung ist gegeben durch $\frac{1}{2}(x, y)$ mit $(x, y) \in \partial K$. Eine Parametrisierung der Kreislinie (also von ∂K) ist etwa $\varphi(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ mit $t \in [0, 2\pi)$. Damit folgt

$$\int_{\partial K} v \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}s = \int_{\partial K} \frac{1}{2}(x^3, 0) \cdot (x, y) \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} 16(\cos t)^4 \, \mathrm{d}t = 12\pi.$$

Mit dem Satz von Gauß:
Wir berechnen $\operatorname{div} v = 3x^2$ und wir erhalten unter Benutzung von Polarkoordinaten

$$\int_{\partial K} v \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}s = \int_K 3x^2 \, \mathrm{d}(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 3r^2 (\cos\varphi)^2 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = 12\pi.$$