Analysis II für M, LaG/M, Ph
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
28.1.2011

Gruppenübung

Aufgabe G12.1
Berechnen Sie das Gebietsintegral

$$\iint_G \sin(x-y)\, dG,$$

wobei G das Dreieck mit den Rändern $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$ und $x + y = 0$ ist.

Lösung: Wir berechnen dieses Gebietsintegral mit Hilfe von (9a) (vgl. Seite 237).
Es gilt $f_1(x) = -x,\ f_2(x) = \frac{\pi}{2},\ a_1 = -\frac{\pi}{2}$ und $a_2 = \frac{\pi}{2}$. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\iint_G \sin(x-y)\, dG &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-x}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-y)\, dy \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos(x-y)]_{y=-x}^{y=\frac{\pi}{2}}\, dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos(x-\frac{\pi}{2}) - \cos(2x)]\, dx = [\sin(x-\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}\sin(2x)]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin(0) - \frac{1}{2}\sin(\pi) - \sin(-\pi) + \frac{1}{2}\sin(-\pi) = 0\end{aligned}$$

Aufgabe G12.2

(a) Es sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ und $f : B \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_B f(x,y)\, \mathrm{d}(x,y)$$

durch geeignete “krumme” Zerlegungen des Integrationsgebietes und passende Treppenfunktionen.
Hinweis: Die Funktion f hängt nur vom Abstand von (x,y) zum Nullpunkt ab. Es gelten die Formeln

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)n.$$

(b) Es seien $a, b > 0$. Berechnen Sie das Volumen der Ellipse $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 < 1\}$, indem Sie die Substitution für den Einheitskreis, gegeben durch σ mit $\sigma(x,y) := (ax, by)$, $\tau \equiv ab$ und der Zerlegung Z_n aus Teil (a), verwenden.

Lösung:

(a) Wir wählen als Zerlegung Kreisringstücke $K_{i,j}$ wobei $K_{i,j}$ alle Punkte des $\mathbb{R}^2$ enthält, deren Polarkoordinatendarstellung $r \in (\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n+1})$ (Radius) und $\alpha \in (\frac{2\pi(j-1)}{n}, \frac{2\pi j}{n})$ (Winkel) erfüllt, wobei $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Der übrig bleibende Kreis im Inneren hat den Radius $\frac{1}{n+1}$ und kann aus Stetigkeitsgründen bei der Integration ignoriert werden. Die Mengen $K_{i,j}$ haben den Flächeninhalt

$$\mu(K_{i,j}) = \frac{\pi(2i+1)}{n(n+1)}.$$

Ober- bzw. Untersumme ergeben sich durch

$$\underline{f}_n(x,y) = \left(\frac{i}{n+1}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad \bar{f}_n(x,y) = \left(\frac{i+1}{n+1}\right)^2.$$

Daher ergibt sich als Integral

$$\begin{aligned}\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \lim_{n\to\infty} \pi \sum_{i,j=1}^{n} \underline{f}_n(x,y)\mu(K_{i,j}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \pi \sum_{i=1}^{n} \frac{2i^3+i^2+1}{(n+1)^4} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2\pi \frac{1}{4} n^2(n+1)^2(n+1)^{-4} \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(b) Die Angegebene Substitution überführt Kreissegmente in Ellipsoidsegmente. Daher ergibt sich das Volumen als

$$\int_E \mathrm{d}x = \int_B \tau(u)\,\mathrm{d}u = ab\mu(B) = ab\pi.$$

Aufgabe G12.3 (**Masse und Schwerpunkt**)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kegel mit einem Kreis in der x_1-x_2-Ebene um den Nullpunkt und mit Radius R als Grundfläche. Die Spitze des Kegels befinde sich im Punkt $(0,0,h)$. Der Kegel sei mit einer Masse gefüllt, deren Dichte $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $\rho(x_1,x_2,x_3) = x_3$ gegeben ist. Bestimmen Sie

(a) die durch

$$M := \int_K \rho(x_1,x_2,x_3) d(x_1,x_2,x_3)$$

gegebene Masse des Kegels,

(b) den Schwerpunkt $S = (S_1,S_2,S_3)$ des Kegels, dessen Koordinaten durch

$$S_j := \frac{1}{M}\int_K x_j \rho(x_1,x_2,x_3) d(x_1,x_2,x_3)$$

für $j = 1,2,3$ gegeben sind.

Lösung: (a) Wir verwenden Zylinderkoordinaten $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ und $x_3 = z$. Die Determinante der Jacobimatrix ist durch r gegeben und der Kegel wird durch die Menge

$$K = \{(r,\varphi,z) \;:\; 0 \le r \le R(1-z/h),\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le h\}$$

beschrieben. Für die Masse gilt dann

$$\begin{aligned} M = &\ \int_K \rho(x_1,x_2,x_3) d\lambda(x_1,x_2,x_3) &&= \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{R(1-z/h)} zr\ drdzd\varphi \\ = &\ \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^h \left(R(1-\tfrac{z}{h})\right)^2 z\ dzd\varphi &&= \frac{1}{2}R^2\int_0^{2\pi}\int_0^h (z-2z^2/h+z^3/h^2)dzd\varphi \\ = &\ R^2\pi\left[\tfrac{z^2}{2} - \tfrac{2z^3}{3h} + \tfrac{z^4}{4h^2}\right]_0^h &&= R^2\pi h^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{R^2h^2\pi}{12}\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} S_1 = &\ \tfrac{1}{M}\int_K x_1\rho(x_1,x_2,x_3)d\lambda(x_1,x_2,x_3) &&= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{R(1-z/h)} r\cos\varphi\ zr\ drdzd\varphi \\ = &\ \tfrac{1}{M}\int_0^h\int_0^{R(1-z/h)} r^2z\ drdz\int_0^{2\pi}\cos\varphi\ d\varphi &&= 0,\end{aligned}$$

da das Integral über die Winkelvariable verschwindet. Aus Symmetriegründen gilt auch $S_2 = 0$.

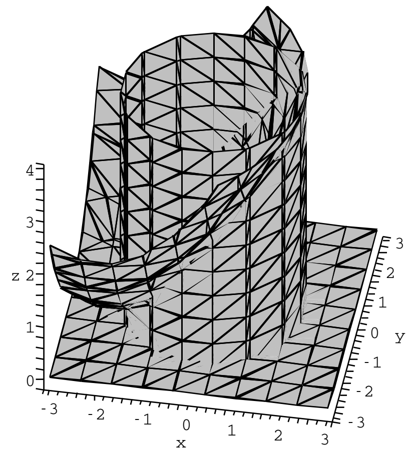
$$\begin{aligned} S_3 = &\ \tfrac{1}{M}\int_K x_3\rho(x_1,x_2,x_3)d\lambda(x_1,x_2,x_3) &&= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{R(1-z/h)} z^2r\ drdzd\varphi \\ = &\ \tfrac{R^2\pi}{M}\int_0^h(z^2-2z^3/h+z^4/h^2)dz &&= \frac{R^2\pi}{M}h^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}h.\end{aligned}$$

Also gilt $S = (0,0,2h/5)$.

Hausübung

Aufgabe H12.1 (6 Punkte)

Bestimmen Sie das Volumen, welches innerhalb des Zylinders $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, über der Ebene $z = 0$ und unterhalb des durch die Gleichung $(x+2)^2 + y^2 = 4z$ gegebenen Paraboloids liegt.



Lösung: In kartesischen Koordinaten sieht das ganze wie folgt aus: wir belassen x als freie Variable aus $[-2,2]$. Dann ist y von x abhängig, damit ein Kreis herauskommt: $-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$. Die Höhe des Körpers können wir direkt aus der Aufgabenstellung ablesen: $0 \leq z \leq \frac{1}{4}(x+2)^2 + \frac{1}{4}y^2$. Den jetzt auftretenden Integralen ist allerdings nur mit etwas Erfahrung beizukommen:

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_T 1 \; \mathrm{d}x \;\; \mathrm{d}y \;\; \mathrm{d}z = 2 \cdot \int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \int\limits_{0}^{\frac{1}{4}(x+2)^2 + \frac{1}{4}y^2} 1 \; \mathrm{d}z \;\; \mathrm{d}y \;\; \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \left((x+2)^2 + y^2\right) \mathrm{d}y \;\; \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} \left[y(x+2)^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} (x+2)^2 \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{12} x (4-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x \sqrt{4-x^2} + 6 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=-2}^{x=2} = 6\pi.
\end{aligned}
$$

In Zylinderkoordinaten ist ein wenig Vorarbeit zu leisten, dafür wird's beim Integrieren hübsch einfach. An dem Zylinder ist nichts mehr zu tun (klar, bei *Zylinder*koordinaten). Nur die Höhe muß ein wenig umgeformt werden:

$$
\begin{aligned}
(x+2)^2 + y^2 = 4z \quad &\Leftrightarrow \quad (r\cos\varphi + 2)^2 + r^2 \sin^2 \varphi = 4t \\
&\Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{4} r^2 + r \cos\varphi + 1.
\end{aligned}
$$

Damit rechnen wir dann wie folgt (Hinweis, insbesondere für Klausuren: Transformationsfaktor r beim Übergang auf Zylinderkoordinaten wird gerne vergessen!):

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_T 1 \;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{4}r^2 + r\cos\varphi + 1} r\;\mathrm{d}t\;\mathrm{d}\varphi\;\mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}r^2 + r\cos\varphi + 1\right) r\;\mathrm{d}\varphi\;\mathrm{d}r = \int_0^2 \left[\frac{1}{4}r^3\varphi + r^2\sin\varphi + r\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \left(\frac{\pi}{2}r^3 + 2r\pi\right)\;\mathrm{d}r = \left[\frac{\pi}{8}r^4 + \pi r^2\right]_{r=0}^{r=2} = 6\pi,
\end{aligned}
$$

das gleiche Resultat, allerdings mit wesentlich weniger Schmerzen erhalten.

Aufgabe H12.2 (6 Punkte)
Berechnen Sie das Volumen des Raumstückes, welches den beiden Zylindern $x^2 + y^2 \leq 1$ und $x^2 + z^2 \leq 1$ gemeinsam ist.

Lösung: Wir müssen das Volumen des Gebietes $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\; x^2 + y^2 \leq 1,\; x^2 + z^2 \leq 1\}$ bestimmen, d.h.

$$V(G) = \iiint_G dG.$$

Wir erhalten folgende Integrationsgrenzen:

$$
\begin{aligned}
-1 \leq x &\leq 1 \\
-\sqrt{1-x^2} \leq y &\leq \sqrt{1-x^2} \\
-\sqrt{1-x^2} \leq z &\leq \sqrt{1-x^2}.
\end{aligned}
$$

Damit läßt sich das gesuchte Volumen berechnen:

$$
\begin{aligned}
V(G) &= \iiint_G dG = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz\;dy\;dx = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} [z]_{z=-\sqrt{1-x^2}}^{z=\sqrt{1-x^2}}\;dy\;dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2}\;dy\;dx = \int_{-1}^{1} [2\sqrt{1-x^2}\,y]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}}\;dx = \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)\;dx \\
&= 4x - \frac{4}{3}x^3 \Big|_{-1}^{1} = 4 - \frac{4}{3} + 4 - \frac{4}{3} = \frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe H12.3 (6 Punkte)
Gegeben seien $G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\; x,y,z \geq 0,\; x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \leq 1\}$ und die Funktion $f(x,y,z) = x$.

(a) Bestimmen Sie das Volumen $V(G)$ des Gebietes G.

(b) Berechnen Sie das Gebietsintegral

$$\iint_G f(x,y,z)\;dG.$$

Lösung:

(a) Für das Volumen von G gilt:

$$V(G) = \iiint_G dG.$$

Wir erhalten folgende Integrationsgrenzen:

$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq 2 - 2x$$
$$0 \leq z \leq 3 - 3x - \frac{3}{2}y.$$

Damit läßt sich das gesuchte Volumen berechnen:

$$\begin{aligned}
V(G) = \iiint\limits_G dG &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} dz\ dy\ dx = 3\int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 - x - \frac{1}{2}y)\ dy\ dx \\
&= 3\int_0^1 \left[y - xy - \frac{1}{4}y^2 \right]_0^{2-2x} dx = 3\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\ dx = 3\int_0^1 (x-1)^2\ dx \\
&= 3 \cdot \frac{1}{3}(x-1)^3 \Big|_0^1 = 1
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\iint_G f(x,y,z)\ dG &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} x\ dz\ dy\ dx \\
&= \int_0^1 x \int_0^{2-2x} \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} dz\ dy\ dx \\
&= 3\int_0^1 x(x^2 - 2x + 1)\ dx = 3\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$