Analysis II für M, LaG/M, Ph
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
21.01.2011

Gruppenübung

Aufgabe G11.1
Sei I ein abgeschlossenen Intervall. Zeigen Sie durch die Benutzung des Summationstheorem (Theorem 23.9), dass $\int_a^b 2x\mathrm{d}x = b^2 - a^2$ für alle $a \leq b$ mit $[a,b] \subseteq I$.
Hinweis. Betrachten Sie die Funktionen $f(x) = 2x$, $x \in I$ und $W([a,b]) = b^2 - a^2$ für $a \leq b$ mit $[a,b] \subseteq I$.

Lösung:

Wir betrachten die Funktionen $f(x) = 2x$, $x \in I$ und $W([a,b]) = b^2 - a^2$ für $0 \leq a \leq b$. Für $a \leq c \leq b$ gilt

$$W([a,b]) = b^2 - a^2 = b^2 - c^2 + c^2 - a^2 = W([a,c]) + W([c,b]).$$

Also ist W additiv. Nun zeigen wir, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $[a,b] \subseteq I$ mit $|b-a| < \delta$ gilt

$$|W([a,b]) - f(a) \cdot \mu([a,b])| \leq \varepsilon \mu([a,b]),$$

wobei $\mu([a,b]) = b - a$. (Das ist $(*)$ vom Summationstheorem 23.9- (iii) für $\xi = a$). Erstes bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} |W([a,b]) - f(a) \cdot (b-a)| &= |b^2 - a^2 - 2a(b-a)| \\ &= |b-a| \cdot |b+a-2a| \\ &= (b-a)^2. \end{aligned}$$

Also für alle $\varepsilon > 0$ nehmen wir $\delta = \varepsilon$. Wenn $[a,b] \subseteq I$ mit $a \leq b$ und $b - a < \delta$, gilt

$$|W([a,b]) - f(a) \cdot (b-a)| \leq (b-a)^2 < \delta \cdot (b-a) = \varepsilon \cdot (b-a).$$

Nach dem Summationstheorem folgt, dass $W([a,b]) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b 2x\mathrm{d}x$. $\dashv$

Aufgabe G11.2
Wir betrachten die Funktion $f : I = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} :, f(x,y) = x + y$.

(a) Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung Z_n von I in n^2 Teilintervalle an.
(b) Geben Sie zur Zerlegung Z_n zwei Treppenfunktionen $\underline{f}_n, \overline{f}_n$ mit $\underline{f}_n \leq f \leq \overline{f}_n$ an.
(c) Benutzen Sie die Treppenfunktionen aus (b) um zu zeigen, dass f auf I Riemannintegrierbar ist.

Lösung:

(a) Wir definieren

$$I_{ij} = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$$

für alle $i,j = 0,\ldots,n-1$ und $Z_n = \{I_{ij} \mid i,j = 0,\ldots,n-1\}$. Es ist klar, dass Z_n n^2 Teilintervalle hat.

(b) Sei $0 \leq x < 1$ und $0 \leq y < 1$. Wir definieren

$$\underline{f}_n(x,y) = \frac{i}{n} + \frac{j}{n} \quad \text{und} \quad \overline{f}_n(x,y) = \frac{i+1}{n} + \frac{j+1}{n}$$

wobei i, j die einzige Zahlen, für die $x \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ und $y \in [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})$ gilt. Wenn $x = 1$, nehmen wir $\frac{n-1}{n}$ statt $\frac{i}{n}$ und $\frac{1}{n}$ statt $\frac{i+1}{n}$. Ebenso für $y = 1$. Es ist klar, dass $\underline{f}_n \leq f \leq \overline{f}_n$.

(c) Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \int_I (\overline{f}_n - \underline{f}_n) \mathrm{d}(x,y) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_I \overline{f}_n \mathrm{d}x &= \sum_{i,j=0,\dots,n-1} (\frac{i+1}{n} + \frac{j+1}{n}) \cdot \frac{1}{n^2} \\
\int_I \underline{f}_n \mathrm{d}x &= \sum_{i,j=0,\dots,n-1} (\frac{i}{n} + \frac{j}{n}) \cdot \frac{1}{n^2},
\end{aligned}$$

$(\frac{1}{n^2} = \mu(I_{ij}))$. Falls $0 \leq i, j < n-1$ ist die Komponente $(\frac{i+1}{n} + \frac{j+1}{n}) \cdot \frac{1}{n^2}$ der ersten Summe auch eine Komponente der zweiten Summe und falls $0 < i, j \leq n-1$ ist die Komponente $(\frac{i}{n} + \frac{j}{n}) \cdot \frac{1}{n^2}$ der zweiten Summe auch eine Komponente der ersten Summe. Also

$$\begin{aligned}
\int_I (\overline{f}_n - \underline{f}_n) \mathrm{d}x &= \sum_{j=0,\dots,n-1} (1 + \frac{j+1}{n}) \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{(falls } i = n-1 \text{ in der ersten Summe)} \\
&\quad + \sum_{i=0,\dots,n-1} (\frac{i+1}{n} + 1) \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{(falls } j = n-1 \text{ in der ersten Summe)} \\
&\quad - \sum_{j=0,\dots,n-1} (\frac{0}{n} + \frac{j}{n}) \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{(falls } i = 0 \text{ in der zweiten Summe)} \\
&\quad - \sum_{i=0,\dots,n-1} (\frac{i}{n} + \frac{0}{n}) \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{(falls } j = 0 \text{ in der zweiten Summe)} \\
&= 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n^3} - 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^3} \\
&= 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} + 2 \cdot (\frac{n}{n^3} - \frac{0}{n^3}) \\
&= 2 \cdot \frac{n}{n^2} + 2 \cdot \frac{n}{n^3} = 2 \cdot (\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}).
\end{aligned}$$

Deshalb $\lim_{n\to\infty} \int_I (\overline{f}_n - \underline{f}_n) \mathrm{d}(x,y) = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot (\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = 0$.

$\dashv$

Aufgabe G11.3
Bestimmen Sie die folgende Integrale.

(a) $I_1 = \int_S \cos x \sin y \, \mathrm{d}(x,y)$, wobei $S = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) $I_2 = \int_R x^4 y + y^2 \mathrm{d}(x,y)$, wobei $R = [-1,1] \times [0,1]$.

Lösung:

Nach dem Satz von Fubini gilt

(a)

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos x \sin y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin y \sin x\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin y(\sin(\pi/2)-0)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin y \mathrm{d}y \\
&= -\cos y\Big|_{y=0}^{y=\pi/2} \\
&= -\cos(\pi/2)+\cos 0 = 1.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{1}\int_{-1}^{1} x^4y+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{1} yx^5/5+y^2x\Big|_{x=-1}^{x=1}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{1} 2y/5+2y^2\mathrm{d}y \\
&= 2/5\cdot\frac{y^2}{2}+2\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=1} \\
&= 2/5\cdot 1/2+2/3 = 13/15.
\end{aligned}
$$

$\dashv$

Aufgabe G11.4
Bestimmen Sie die Extrema von der Funktion f, die so definiert ist: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: f(x,y)=4x^2-3xy$ unter der Nebenbedingung $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$.

Lösung:

Die Lagrange-Funktion lautet $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$. Wenn $g(x,y)=0$, gilt $(x,y)\neq(0,0)$. Deshalb, wenn $g(x,y)=0$, ist mindestens eine von den partiellen Ableitungen von g nicht Null an der Stelle (x,y). Jede lokale Extremalstelle (x,y) (unter der Nebenbedingung) erfüllt:

$$
\begin{aligned}
& \nabla f(x,y) = -\lambda\nabla g(x,y) \\
\Longleftrightarrow\quad & (8x-3y,-3x) = -\lambda(2x,2y) \\
\Longleftrightarrow\quad & (8+2\lambda)x-3y=0 \quad\text{und}\quad x=\frac{2}{3}\lambda y
\end{aligned}
$$

Wir ersetzen x durch $\frac{2}{3}\lambda y$. Es folgt

$$
\begin{aligned}
& (8+2\lambda)\cdot\frac{2}{3}\lambda y-3y=0 \\
\Longleftrightarrow\quad & (4\lambda^2+16\lambda-9)\cdot y=0
\end{aligned}
$$

Falls $y=0$, ist auch $x=0$. Da aber $g(0,0)\neq 0$ ist dieser Fall für uns belanglos. Also gilt $y\neq 0$ und deshalb $4\lambda^2+16\lambda-9=0$. Das heißt: $\lambda=\frac{1}{2}$ oder $\lambda=-\frac{9}{2}$. Also nur Punkte der folgenden Form können Extrema sein:

$$
(\frac{1}{3}y,y)\quad\text{und}\quad(-3y,y).
$$

Da $g(\frac{1}{3}y,y)=\frac{10}{9}y^2-1=0$, gilt $y=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ oder $y=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Da $g(-3y,y)=10y^2-1=0$, gilt $y=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ oder $y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Also nur die vier folgenden Punkte können Extrema sein:

$$p_1=(-\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}), \qquad p_2=(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}})$$
$$p_3=(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}}), \qquad p_4=(-\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}})$$

Durch Einsetzen der Punkte in f erhält man:

$$\begin{aligned} f(p_1)=f(p_2) &= -\frac{1}{2} \\ f(p_3)=f(p_4) &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Da die Menge $K:=\{(x,y)\mid g(x,y)=0\}$ Kompakt ist und die Funktion f stetig ist, folgt, dass f auf K Minimum und Maximum annimmt. Also sind die Minima von f die Punkte p_1 und p_2 und die Maxima von f die Punkte p_3, p_4. ⊣

Hausübung

Aufgabe H11.1 (6 Punkte)
Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: &\quad f(x,y)=xy, \\ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: &\quad g(x,y)=x^2+4y^2-2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y)=0$.

Lösung:

Die Lagrange-Funktion lautet $L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+4y^2-2)$. Wenn $g(x,y)=0$, gilt $(x,y)\neq(0,0)$. Deshalb, wenn $g(x,y)=0$, ist mindestens eine von den partiellen Ableitungen von g nicht Null an der Stelle (x,y). Jede lokale Extremalstelle (x,y) (unter der Nebenbedingung) erfüllt:

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= y+2\lambda x=0, \\ L_y(x,y,\lambda) &= x+8\lambda y=0, \\ L_z(x,y,\lambda) &= x^2+4y^2-2=0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich $y=-2\lambda x$, mit der zweiten Gleichung ergibt sich dann $x(1-16\lambda^2)=0$, d.h. einer der beiden Faktoren ist 0. Unterscheiden wir zwei Fälle:
Fall 1: $x=0$. Dann ist auch $y=0$, sodass ein Widerspruch zur dritten Gleichung entsteht.
Fall 2: $(1-16\lambda^2)=0$. Dann erhält man $\lambda^2=\frac{1}{16}$ (d.h. $\lambda=\pm\frac{1}{4}$). Setzt man dies in die dritte Gleichung ein, erhält man $2x^2=2$. Somit ergeben sich folgende möglichen Kandidaten für die lokalen Extrema:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 & y_1 &= \frac{1}{2}, \\ x_2 &= 1 & y_2 &= -\frac{1}{2}, \\ x_3 &= -1 & y_3 &= \frac{1}{2}, \\ x_4 &= -1 & y_4 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $f(x_1,y_1)=f(x_4,y_4)=\dfrac{1}{2}$, $f(x_2,y_2)=f(x_3,y_3)=-\dfrac{1}{2}$.
Ungeklärt ist zunächst, ob dies wirklich lokale Extrema sind. Daher folgende Überlegung: Der zulässige Bereich $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+4y^2=2\}$ ist eine Ellipse, also eine kompakte Teilmenge. (Anmerkung: Der zulässige Bereich ist eine Höhenline der stetigen Funktion $g(x):=x^2+4y^2$. Höhenlinien zu stetigen Funktionen sind stets abgeschlossen, sodass man i.a. lediglich überprüfen muss, ob die Menge beschränkt ist, um Kompaktheit zu zeigen.) Die Funktion f ist stetig, sodass sie auf der kompakten Teilmenge K ein globales Maximum und Minimum annehmen muss. Damit sind (x_1,y_1) und (x_4,y_4) die Maximalstellen, (x_2,y_2) und (x_3,y_3) die Minimalstellen. ⊣

Aufgabe H11.2 (6 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : I = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} : f(x,y,z) = xy + z$. Bestimmen Sie Treppenfunktionen $\underline{f}_n, \overline{f}_n$ für jedes n mit $\underline{f}_n \leq f \leq \overline{f}_n$ und $\lim_{n\to\infty} \int_I (\overline{f}_n - \underline{f}_n)\mathrm{d}(x,y) = 0$.

Lösung:

Man kann diese Aufgabe wie G.11.2 und T.11.1 lösen. In diesen Fall muss man die Intervalle

$$I_{ijk} = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}] \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$$

nehmen. Dann definiert man die Funktionen $\underline{f}_n, \overline{f}_n$ so:

$$\begin{aligned} \underline{f}_n(x,y,z) &= \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} + \frac{k}{n}, \\ \underline{f}_n(x,y,z) &= \frac{i+1}{n} \cdot \frac{j+1}{n} + \frac{k+1}{n} \end{aligned}$$

wenn $(x,y,z) \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}) \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}) \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$, und ebenso fortfahren.
Es gibt aber eine andere Arte. Nach T11.1 gibt Funktionen $\underline{g}_n(x,y), \overline{g}_n(x,y)$, $n \in \mathbb{N}$, die auf $[0,1] \times [0,1]$ definiert sind mit

$$\underline{g}_n(x,y) \leq x \cdot y \leq \overline{g}_n(x,y) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_I (\overline{g}_n - \underline{g}_n)\mathrm{d}(x,y) = 0.$$

Wir bemerken, dass $x \cdot y \in [0,1]$ für $x, y \in [0,1]$. Wir setzen $w = x \cdot y$ ein. Nach G11.2 gibt Funktionen $\underline{h}_n(w,z), \overline{h}_n(w,z)$, $n \in \mathbb{N}$, die auf $[0,1] \times [0,1]$ definiert sind mit

$$\underline{h}_n(w,z) \leq w + z \leq \overline{h}_n(w,z), \ \overline{h}_n(w_1,z) - \overline{h}_n(w_2,z) \leq w_1 - w_2 + \frac{1}{n} \ \text{ für } w_1 > w_2 \text{und } \ \overline{h}_n(w,z) - \underline{h}_n(w,z) = \frac{2}{n}.$$

Nun nehmen wir

$$\underline{f}_n(x,y,z) = \underline{h}_n(\underline{g}_n(x,y),z) \quad \text{und} \quad \overline{f}_n(x,y,z) = \overline{h}_n(\overline{g}_n(x,y),z).$$

Es ist klar, dass $\underline{f}_n$ und $\overline{f}_n$ Treppenfunktionen sind. Es gilt $\underline{f}_n(x,y,z) = \underline{h}_n(\underline{g}_n(x,y),z) \leq \underline{g}_n(x,y) + z \leq x \cdot y + z = f(x,y,z)$ und ebenso für $\overline{f}_n(x,y,z)$. Also $\underline{f}_n \leq f \leq \overline{f}_n$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \int_I (\overline{f}_n - \underline{f}_n)(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_I (\overline{h}_n(\overline{g}_n(x,y),z) - \underline{h}_n(\underline{g}_n(x,y),z))\mathrm{d}(x,y,z) \\ &= \int_I \overline{h}_n(\overline{g}_n(x,y),z) - \overline{h}_n(\underline{g}_n(x,y),z))\mathrm{d}(x,y,z) \\ &\quad + \int_I \overline{h}_n(\underline{g}_n(x,y),z) - \underline{h}_n(\underline{g}_n(x,y),z))\mathrm{d}(x,y,z) \\ &< \int_I (\overline{g}_n(x,y) - \underline{g}_n(x,y) + \frac{1}{n})\mathrm{d}(x,y,z) + \int_I \frac{2}{n}\mathrm{d}(x,y,z) \\ &= \int_I (\overline{g}_n(x,y) - \underline{g}_n(x,y))\mathrm{d}(x,y,z) + \int_I \frac{3}{n}\mathrm{d}(x,y,z) \\ &= 1 \cdot \int_{[0,1]\times[0,1]} (\overline{g}_n(x,y) - \underline{g}_n(x,y))\mathrm{d}(x,y) + \frac{3}{n} \cdot \mu(I) \\ &= \int_{[0,1]\times[0,1]} (\overline{g}_n(x,y) - \underline{g}_n(x,y))\mathrm{d}(x,y) + \frac{3}{n} \to 0. \end{aligned}$$

⊣

Aufgabe H11.3 (6 Punkte)
Bestimmen Sie die folgende Integrale.

(a) $J_1 = \int_S (y\cos x + 2) \mathrm{d}(x,y)$, wobei $S = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,1]$.

(b) $J_2 = \int_R x^2 + y^2 \mathrm{d}(x,y)$, wobei $R = [-1,1] \times [0,1]$.

Lösung:

Nach dem Satz von Fubini gilt

(a)

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} y\cos x + 2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 y\sin x + 2x\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 y\sin(\pi/2) + \pi \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 y + \pi \mathrm{d}y \\ &= \frac{y^2}{2} + \pi y\Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= \pi + 1/2. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^1 \int_{-1}^1 x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 y^2 x + x^3/3\Big|_{x=-1}^{x=1} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 2y^2 + 2/3 \mathrm{d}y \\ &= 2/3 + 2\frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= 2/3 + 2/3 = 4/3. \end{aligned}$$

⊣