Analysis II für M, LaG/M, Ph
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
14.1.2010

Gruppenübung

Aufgabe G10.1
Berechnen Sie die Kurvenlänge der folgenden Kurven

(a) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (r\cos t, r\sin t, ct)$, wobei $r, c > 0$.

(b) $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$

Lösung: (a): Es gilt
$f'(t) = (-r\sin t, r\cos t, c)$ und $\|f'(t)\|^2 = r^2 + c^2$. Also folgt

$$L(f) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{r^2 + c^2}.$$

(b): Es gilt
$g'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$ und $\|g'(t)\|^2 = \sinh^2 t + \cosh^2 t + 1 = 2\cosh^2 t$. Damit gilt

$$L(g) = \int_0^1 \sqrt{2}\cosh t\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\sinh 1.$$

Aufgabe G10.2

(a) Wir betrachten die Drehung eines starren Körpers um die e_3-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Das heißt, der Winkel φ der Drehung wächst linear mit der Zeit t, d.h. $\varphi(t) = \omega t$. Jeder Punkt $x = x(0)$ durchläuft also die Bahn

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(0)$$

i. Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor eines Partikels, der in $x(0)$ startet, zum Zeitpunkt $t > 0$, also $v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$.

ii. Das Geschwindigkeitsfeld ist gegeben durch $v = \omega(-x_2,\, x_1,\, 0)^T$. Berechnen Sie $\operatorname{rot} v$.

(b) Es seien $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

i. $\operatorname{rot}(h \cdot F) = h \cdot \operatorname{rot} F - F \times \nabla h$;

ii. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) = \nabla(\operatorname{div} F) - \Delta F$.

Lösung:

(a) i. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \omega \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) & -\cos\varphi(t) & 0 \\ \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -x_2(t) \\ x_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ii. Es ergibt sich $\operatorname{rot} v = 2\omega e_3$ die Länge der Rotation des Geschwindigkeitsfelds ist also das dopplelte der Winkelgeschwindigkeit.

(b) i. Es gilt $\partial_i(hF_j) = (\partial_i h)F_j + h(\partial_i F_j)$, damit folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(hF) &= \begin{pmatrix} \partial_2(hF_3) - \partial_3(hF_2) \\ \partial_3(hF_1) - \partial_1(hF_3) \\ \partial_1(hF_2) - \partial_2(hF_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\partial_2 h)F_3 + h(\partial_2 F_3) - (\partial_3 h)F_2 + h(\partial_3 F_2) \\ (\partial_3 h)F_1 + h(\partial_3 F_1) - (\partial_1 h)F_3 + h(\partial_1 F_3) \\ (\partial_1 h)F_3 + h(\partial_1 F_3) - (\partial_3 h)F_1 + h(\partial_3 F_1) \end{pmatrix} \\
&= h \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\partial_2 h)F_3 - (\partial_3 h)F_2 \\ (\partial_3 h)F_1 - (\partial_1 h)F_3 \\ (\partial_1 h)F_3 - (\partial_3 h)F_1 \end{pmatrix} \\
&= h \cdot \operatorname{rot} F - F \times \nabla h
\end{aligned}$$

ii. Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\operatorname{rot} F &= \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_2(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) - \partial_3(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) \\ \partial_3(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) - \partial_1(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \\ \partial_1(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) - \partial_2(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) \end{pmatrix} \\
&= \nabla(\operatorname{div} F) - \Delta F
\end{aligned}$$

Aufgabe G10.3
Es seien $a, b > 0$ und

$$M_{a,b} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Lösung: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ und zeigen, dass 1 ein regulärer Wert von f ist. Es gilt

$$Df(x, y, z) = (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, 0)$$

und damit folgt, dass $Df = 0$ falls $x = y = 0$. Da jedoch keiner der Punkte $(0, 0, z)$ für $z \in \mathbb{R}$ auf $M_{a,b} = f^{-1}(1)$ liegt, ist 1 ein regulärer Wert von f. Mit dem Satz vom regulären Wert folgt nun die Behauptung.

Hausübung

Aufgabe H10.1 (6 Punkte)
Betrachten Sie die Kurve

$$X : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2,\ X(t) = (t^2, t^3).$$

(a) Skizzieren Sie die Bahn der Kurve.
(b) In welchen Punkten $X(t)$ gilt $X'(t) \neq (0, 0)$?
(c) Berechnen Sie die Länge der Kurve X.

Lösung: (b) $X'(t) = (2t, 3t^2)$.
In allen Punkten außer dem Nullpunkt gilt $X'(t) \neq (0, 0)$.
(c)

$$\begin{aligned}
L &= \int_{-1}^{1} \|X'(t)\|\,dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\,dt = \int_{-1}^{1} |t|\,\sqrt{4 + (3t)^2}\,dt \\
&= 2\int_0^1 t\sqrt{4 + (3t)^2}\,dt = 6\int_0^1 t\sqrt{(2/3)^2 + t^2}\,dt = 2\sqrt{((2/3)^2 + t^2)^3}\Big|_{t=0}^{1} \\
&= 2\sqrt{((4/9) + 1)^3} - 2\sqrt{(4/9)^3} = 2\sqrt{(13/9)^3} - 2(2/3)^3 \\
&= (26/27)\sqrt{13} - 16/27.
\end{aligned}$$

Aufgabe H10.2 (6 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y,z) = (x^2 + xy - y - z, 2x^2 + 3xy - 2y - 3z)$. Zeigen Sie, dass $M = f^{-1}(0)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie den Tangentialraum T_0M.

Lösung: Es gilt

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+y & x-1 & -1 \\ 4x+3y & 3x-2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt, dass Rang $Df \geq 1$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Da aus $t(x-y) = 1$ und $t(3x-2) = 3$ mit $t \neq 0$ folgt, dass $x = \frac{1+t}{t}$ und damit $t(3x-2) = 3 + t = 3$ gilt. Also gibt es kein $t \neq 0$ so dass

$$t \begin{pmatrix} x-1 \\ 3x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und daher hat Df auf M stets den Rang 2 ist also Surjektiv. Mit dem Satz vom regulären Wert folgt nun, dass M eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.
0 ist ein regulŕer Wert von f. Daher ist mit Satz 3.8 der Vorlesung der Tangentialraum gegeben durch

$$T_0M = \text{kern } Df(0) = \text{kern} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \text{kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe H10.3 (6 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend und $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie:
Ist $\int_\gamma F(x)dx$ wegunabhängig, dann ist F ein Gradientenfeld, d.h. es existiert eine Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $F = \nabla\varphi$.

Lösung: Es sei $\xi, x \in \Omega$ fest gewählt und γ ein Weg, der ξ mit x verbindet. Wir definieren die Funktion

$$V(x) = \int_\gamma F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wegen der Wegunabhängigkeit ist diese Funktion wohldefiniert. Zur Bestimmung der Ableitung hängen wir an γ einen geradlinigen Weg γ_1, der den Punkt x mit $x+h$ verbindet, also $\gamma_1(t) = x + th$, $t \in [0,1]$. Es gilt dann

$$V(x+h) - V(x) = \int_{\gamma_1} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 F(x+th) \cdot h\,\mathrm{d}t.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\tau \in (0,1)$, so dass

$$\int_0^1 F(x+th) \cdot h\,\mathrm{d}t = F(x+\tau h) \cdot h$$

gilt. Wegen der Stetigkeit von F und der Abschätzung $|F(x+\tau h) \cdot h - F(x) \cdot h| \leq \|F(x+\tau h) - F(x)\| \cdot \|h\|$ folgt, dass $V(x+h) - V(x) = F(x) \cdot h + \varepsilon(h)\|h\|$, wobei $\varepsilon(h) \to 0$ für $h \to 0$. Damit gilt aber $\nabla V = F$.