Analysis II für M, LaG/M, Ph
9. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
17.12.2010

Gruppenübung

Aufgabe G9.1

Wir betrachten die Menge $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0\}$ and $(x_0,y_0) \in A$. Bestimmen Sie (x_0,y_0), für die eine offene Menge W und eine differenzierbare Funktion $\varphi : W \to \mathbb{R}$ existieren mit $x_0 \in W$, $\varphi(x_0) = y_0$ und $(x,\varphi(x)) \in A$ für alle $x \in W$.

Lösung:

Wir betrachten die Funktion $F(x,y) = x^2+y^2-1$. Es ist klar, dass F stetig differenzierbar ist und $F(x_0,y_0) = 0$. Es gilt $D_yF(x,y) = (\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)) = (2y)$. Deshalb, wenn $y \neq 0$, kann man den Satz über implizite Funktionen benutzen. Also für alle (x_0,y_0), für die $y_0 \neq 0$, gibt es eine offene Menge W mit $x_0 \in W$ und eine differenzierbare Funktion $\varphi : W \to \mathbb{R}$, sodass $\varphi(x_0) = y_0$ und $(x,\varphi(x)) \in A$ für alle $x \in W$. ⊣

Aufgabe G9.2

Zeigen Sie, dass eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^2$ und differenzierbare Funktionen $u \equiv u(x,y)$, $v \equiv v(x,y)$, die auf W definiert sind, gibt mit $(1,1) \in W$, $u(1,1) = v(1,1) = 1$ und das folgende System von Gleichungen gilt

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2, \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die partielle Ableitung $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,1)$.

Lösung:

Wir betrachten die Funktionen $F_1(x,y,u,v) = xu+yvu^2-2$, $F_2(x,y,u,v) = xu^3+y^2v^4-2$ für alle $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$ und die Funktion $F = (F_1,F_2)$. Es ist klar, dass F stetig differenzierbar ist und $F(1,1,1,1) = (1+1-2, 1+1-2) = (0,0)$. Wir betrachten u und v als Funktionen von (x,y). Wir berechnen

$$\begin{aligned} D_{u,v}F(x,y,u,v) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u}(x,y,u,v) & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}(x,y,u,v) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u}(x,y,u,v) & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}(x,y,u,v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+2yuv & yu^2 \\ 3u^2x & 4y^2v^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Deshalb

$$D_{u,v}F(1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(D_{u,v}F(1,1,1,1)) = 9$ (daher $D_{u,v}F(1,1,1,1)$ umkehrbar ist), kann man den Satz über implizite Funktionen benutzen. Es gibt eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(1,1) \in W$ und differenzierbare Funktionen $u \equiv u(x,y)$ und $v \equiv$

$v(x,y)$, die auf W definiert sind, mit $u(1,1) = v(1,1) = 1$, sodass $F(x,y,u(x,y),v(x,y)) = (0,0)$, für alle $(x,y) \in W$. Das heißt $F_1(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0$ und $F_2(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0$, für alle $(x,y) \in W$. Deshalb sind die Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ Lösungen des oberen Systems.

Nun bestimmen wir die partielle Ableitung $\dfrac{\partial u}{\partial x} =: u_x$ in $(1,1)$. Wir betrachten die Gleichungen des Systems und setzen wir die partielle Ableitung nach x ein. Nach dem Kettenregeln, folgt dass

$$\begin{aligned} xu_x + u + yv_x u^2 + 2yvuu_x &= 0 \\ 3xu^2u_x + u^3 + 4y^2v^3v_x &= 0. \end{aligned}$$

Wir berechnen das System in $(1,1)$ (es gilt $u(1,1) = v(1,1) = 1$):

$$\begin{aligned} u_x(1,1) + 1 + v_x(1,1) + 2u_x(1,1) &= 0 \\ 3u_x(1,1) + 1 + 4v_x(1,1) &= 0. \end{aligned}$$

Also für $a = u_x(1,1)$ und $b = v_x(1,1)$ gilt

$$\begin{aligned} 3a + b &= -1 \\ 3a + 4b &= -1. \end{aligned}$$

Deshalb $a = -\frac{1}{3}$ und $b = 0$. ⊣

Aufgabe G9.3
Wir betrachten das Vektorfeld

$$f(x,y) = (2xy, x^2 + 2y).$$

(a) Bestimmen Sie ein Potential F von f.

(b) Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma$ von f, wobei

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad 0 \le t \le 1,$$

unter Verwendung der folgenden zwei Arten: (I) der Definition des Kurvenintegrals, (II) der Übung G.9.3-(a).

Lösung:

(a) Eine Funktion F ist ein Potential von f genau wenn $\nabla F = \mathrm{grad} F = f$. Das heißt $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2xy$ und $\dfrac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 2y$. Da $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2xy$, folgt dass

$$F(x,y) = x^2y + h(y),$$

wobei h eine differenzierbare Funktion von y ist. Also

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + h'(y).$$

Deshalb $x^2 + 2y = x^2 + h'(y)$, d.h. $h'(y) = 2y$. Eine Lösung ist $h(y) = y^2$. Daher ist die Funktion

$$F(x,y) = x^2y + y^2$$

ein Potential von f.

(b) (I) Nach der Definition folgt

$$\begin{aligned} \int_\gamma f \,\mathrm{d}\gamma &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (2t^3, 3t^2) \cdot (1, 2t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 2t^3 + 6t^3 \mathrm{d}t = \int_0^1 8t^3 \mathrm{d}t = 2t^4|_0^1 = 2. \end{aligned}$$

Für (II) betrachten wir die Funktion $F(x,y)=x^2y+y^2$, die eine Potential von f ist. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\,\mathrm{d}\gamma &= \int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \nabla F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 (F\circ\gamma)'\mathrm{d}t\\ &= F(\gamma(1))-F(\gamma(0))=F(1,1)-F(0,0)=2.\end{aligned}$$

⊣

Hausübung

Aufgabe H9.1 (6 Punkte)
Es sei $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ die so definiert ist:

$$F(x,y,z)=z^3+2xy-4xz+2y-1.$$

Man zeige, dass durch $F(x,y,z)=0$ in einer Umgebung von $(x,y)=(1,1)$ eine differenzierbare Funktion $z=\varphi(x,y)$ mit $\varphi(1,1)=1$ implizit definiert ist und berechne die partielle Ableitung $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ im Punkt $(1,1)$.

Lösung:

Es gilt $F(1,1,1)=0$ und

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=3z^2-4x,$$

also $\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)=-1\neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt eine offene Menge $W\subseteq\mathbb{R}^2$ mit $(1,1)\in W$ und eine differenzierbare Funktion $\varphi:W\to\mathbb{R}$, sodass $\varphi(1,1)=1$ und $F(x,y,\varphi(x,y))=0$ für alle $(x,y)\in W$.
Nun bestimmen wir die partielle Ableitung $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varphi_x$ im Punkt $(1,1)$. Differentiation der Gleichung $F(x,y,\varphi(x,y))=0$ nach x

$$3\varphi(x,y)^2\cdot\varphi_x(x,y)+2y-4\varphi(x,y)-4x\varphi_x(x,y)=0$$

für alle $(x,y)\in W$. Da $\varphi(1,1)=1$, folgt

$$3\varphi_x(1,1)+2-4-4\varphi_x(1,1)=0,$$

d.h. $\varphi_x(1,1)=-2$. ⊣

Aufgabe H9.2 (6 Punkte)
Wir betrachten die Menge

$$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z^2+2xy-1=0\}, B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z^2+x^2-y^2+xy-20=0\}$$

und einen Punkt $(x_0,y_0,z_0)\in A\cap B$ mit $(x_0,y_0)\neq(0,0)$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $W\subseteq\mathbb{R}$ mit $z_0\in W$ gibt und differenzierbare Funktionen $f,g:W\to\mathbb{R}$ mit $f(z_0)=x_0$, $g(z_0)=y_0$ gibt, sodass $(f(z),g(z),z)\in A\cap B$ für alle $z\in W$.

(b) Zeigen Sie (für die f,g,W von (a)), dass

$$2f(z)f'(z)-2g(z)g'(z)+z=0,$$

für alle $z\in W$.

Hinweis. Benutzen Sie den Satz über implizite Funktionen über eine Funktion $F(z,x,y)=(F_1(z,x,y),F_2(z,x,y))$. Wir betrachten x und y als Funktionen von z.

Lösung:

(a) Wir betrachten die Funktionen $F_1(z,x,y)=z^2+2xy-1$, $F_2(z,x,y)=z^2+x^2-y^2+xy-20$ und $F=(F_1,F_2)$. Beachten Sie, dass $F(z,x,y)=(0,0)$ für alle $(x,y,z)\in A\cap B$; insbesondere $F(z_0,x_0,y_0)=0$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} D_{(x,y)}F(z_0,x_0,y_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(z_0,x_0,y_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(z_0,x_0,y_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(z_0,x_0,y_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(z_0,x_0,y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2y_0 & 2x_0 \\ 2x_0+y_0 & -2y_0+x_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also $\det(D_{(x,y)}F(z_0,x_0,y_0)) = -4(x_0^2+y_0^2)$. Da $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, folgt $\det(D_{(x,y)}F(z_0,x_0,y_0))\neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt eine offene Menge $W\subseteq\mathbb{R}$ with $z_0\in W$ und eine differenzierbare Funktion $\varphi=(f,g):W\to\mathbb{R}^2$ mit $\varphi(z_0)=(f(z_0),g(z_0))=(x_0,y_0)$ und $F(z,\varphi(z))=0$ für alle $z\in W$. Das heißt $(f(z),g(z),z)\in A\cap B$ für alle $z\in W$.

(b) Nach (a) gilt

$$\begin{aligned} z^2+2f(z)g(z)-1 &= 0, \\ z^2+f(z)^2-g(z)^2+f(z)g(z)-20 &= 0, \end{aligned}$$

für alle $z\in W$. Differentiation nach z

$$\begin{aligned} 2z+2f'(z)g(z)+2f(z)g'(z) &= 0, \\ 2z+2f(z)f'(z)-2g(z)g'(z)+f'(z)g(z)+f(z)g'(z) &= 0, \end{aligned}$$

für alle $z\in W$. Nach der ersten Gleichung folgt, dass $f'(z)g(z)+f(z)g'(z)=-z$ und nach der zweiten Gleichung

$$2z+2f(z)f'(z)-2g(z)g'(z)-z=0, \quad \text{d.h.} \quad 2f(z)f'(z)-2g(z)g'(z)+z=0,$$

für alle $z\in W$.

$\dashv$

Aufgabe H9.3 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{\gamma_1}\cos z\,\mathrm{d}x+e^x\mathrm{d}y+e^y\mathrm{d}z$; wobei $\gamma_1(t)=(1,t,e^t)$, $0\le t\le 2$.

[d.h. $F_1(x,y,z)=(\cos z,e^x,e^y)$ und $\displaystyle\int_{\gamma_1}\cos z\,\mathrm{d}x+e^x\mathrm{d}y+e^y\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1}F_1\mathrm{d}\gamma_1$.]

(b) Bestimmen Sie ein Potential F von $f(x,y)=(y\cos x,\sin x+3y^2)$, $x,y\in\mathbb{R}$ und berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\gamma f\,\mathrm{d}\gamma$, wobei $\gamma(t)=(t,\cos t)$, $t\in[0,\pi]$.

Lösung:

(a) Wir betrachten die Funktion $F_1(x,y,z)=(\cos z,e^x,e^y)$. Es gilt

$$F_1(\gamma_1(t))=F_1(1,t,e^t)=(\cos e^t,e,e^t) \quad \text{und} \quad \gamma_1'(t)=(0,1,e^t).$$

Also

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1}\cos z\,\mathrm{d}x+e^x\mathrm{d}y+e^y\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_1}F_1\mathrm{d}\gamma_1 \\ &= \int_0^2 F_1(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 (\cos e^t,e,e^t)\cdot(0,1,e^t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 0+e+e^{2t}\mathrm{d}t \\ &= et+e^{2t}/2|_0^2=\frac{e^4-1}{2}+2e. \end{aligned}$$

(b) Wenn F ein Potential von f ist, gilt $\dfrac{\partial F}{\partial x} = y\cos x$, also

$$F(x,y) = y\sin x + h(y),$$

wobei h eine differenzierbare Funktion ist. Somit $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \sin x + h'(y)$. Nach der Definition von f, gilt $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \sin x + 3y^2$. Deshalb kann man die Funktion $h(y) = y^3$ nehmen. Das heißt, dass ein Potential von f ist

$$F(x,y) = y\sin x + y^3.$$

Für das Integral:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\,\mathrm{d}\gamma &= \int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\pi \nabla F(\gamma)\cdot\gamma'(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\pi (F\circ\gamma)'\mathrm{d}t\\ &= F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0)).\end{aligned}$$

Wir berechnen $\gamma(\pi) = (\pi,-1)$ und $\gamma(0) = (0,1)$; also $F(\gamma(\pi)) = F(\pi,-1) = -\sin\pi + (-1)^3 = -1$ und $F(\gamma(0)) = F(0,1) = \sin 0 + 1^3 = 1$. Deshalb

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}\gamma = F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0)) = -1 - 1 = -2.$$

⊣