Analysis II für M, LaG/M, Ph
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
10.12.2010

Gruppenübung

Hinweis: Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det A = ad - bc \neq 0$, so ist die Inverse von A gegeben durch $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Insbesondere ist A invertierbar genau dann, wenn $\det A \neq 0$ gilt.

Aufgabe G8.1
Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2 - xz^2 + y^3 + z^2 - 3y$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

(a) Bestimmen Sie die Gradienten von f und g.
(b) Bestimmen Sie die Hessematrizen H_f und H_g.
(c) Ist H_f in $(1,-1,2)$, bzw. H_g in $(0,0)$ positiv definit, indefinit oder negativ definit?
(d) Hat die Funktion f an der Stelle $(1,-1,2)$, bzw g in $(0,0)$ ein Extremum?

Lösung: Untersuchung von f:

(a) $\operatorname{grad} f(x,y,z) = (4x - z^2, 3y^2 - 3, 2z(-x+1))^T$
(b) $H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2z \\ 0 & 6y & 0 \\ -2z & 0 & -2x+2 \end{pmatrix}$, $H_f(1,-1,2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(c) Addition der 1. Zeile zur letzten liefert $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ und daher ist $H_f(1,-1,2)$ indefinit,
(d) Es liegt also ein Sattelpunkt vor.

Untersuchung von g:

(a) $\operatorname{grad} g(x,y) = (3x^2 - 3y^2, -6xy)^T = 3(x^2 - y^2, -2xy)^T$
(b) $H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}$, $H_g(0,0) = \mathbf{0}$
(c) Die Hessematrix ist semidefinit.
(d) Die Funktion nimmt in jeder Umgebung des Nullpunkts, sowohl positive, als auch negative Werte an. Es gilt etwa $g(\varepsilon, 0) > 0$ und $g(\varepsilon,\varepsilon) < 0$ für jedes $\varepsilon > 0$. Damit ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Aufgabe G8.2
Bestimmen Sie das globale Maximum und das globale Minimum der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2x^2 + xy + \frac{5}{4}y^2 - 2x - 2y$$

auf dem Quadrat $S = [0,1] \times [0,1]$.

Lösung: *Untersuchung im Inneren von S ($\mathring{S} = (0,1)\times(0,1)$):*
Es gilt $\operatorname{grad} f = (4x + y - 2, x + \frac{5}{2}y - 2)^T$. Er verschwindet bei $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$. Der Punkt $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ liegt im Inneren von S und ist daher Kandidat fÃ¼r einen Extremwert. Der Wert von f an diesem Punkt ist $f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = -1$.
Untersuchung am Rand: Der Rand von S besteht aus vier Teilstrecken:

(a) $y = 0, 0 \le x \le 1 : f(x,0) = 2x^2 - 2x$, kritischer Punkt: $x = \frac{1}{2}$,
Kanditaten für Extremwerte: $f(0,0) = 0, f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{2}, f(1,0) = 0$.

(b) $y = 1, 0 \le x \le 1 : f(x,1) = 2x^2 - x - \frac{3}{4}$, kritischer Punkt: $x = \frac{1}{4}$,
Kanditaten für Extremwerte: $f(0,1) = -\frac{3}{4}, f\left(\frac{1}{4}, 1\right) = -\frac{7}{8}, f(1,1) = \frac{1}{4}$.

(c) $x = 0, 0 \le y \le 1 : f(0,y) = \frac{5}{4}y^2 - 2y$, kritischer Punkt: $y = \frac{4}{5}$,
Kanditaten für Extremwerte: $f(0,0) = 0, f\left(0, \frac{4}{5}\right) = -\frac{4}{5}, f(0,1) = -\frac{3}{4}$.

(d) $x = 1, 0 \le y \le 1 : f(1,y) = \frac{5}{4}y^2 - y$, kritischer Punkt: $y = \frac{2}{5}$,
Kanditaten für Extremwerte: $f(1,0) = 0, f\left(1, \frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{5}, f(1,1) = \frac{1}{4}$.

Damit nimmt f sein globales Maximum bei $(1,1)$ an. $\left(f(1,1) = \frac{1}{4}\right)$ Das globale Minimum ist $f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = -1$.

Aufgabe G8.3
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := (x^3 + xy + 1,\ x + y + y^3 + 1).$$

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung des Punktes $(1,1)$ gibt, die durch f bijektiv auf eine Umgebung des Punktes $(3,4)$ abgebildet wird, und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von f im Punkt $(3,4)$.

Lösung: Es gilt $f(1,1) = (3,4)$ und

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y & x \\ 1 & 1 + 3y^2 \end{pmatrix}$$

und daher ist f stetig differenzierbar. Weiter gilt $J_f(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $\det J_f(1,1) = 15 \neq 0$. Mit dem Satz über die Umkehrfunktion folgt nun, dass es eine Umgebung U von $(1,1)$ und eine Umgebung V von $(3,4)$ gibt, so dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Mit der Kettenregel folgt außerdem, wegen $Id = f|_U^{-1} \circ f|_U$

$$D(Id)(x) = Id = D(f|_U^{-1})(f|_U(x)) \cdot Df|_U(x), \text{ also } D(f|_U^{-1})(f|_U(x)) = Df|_U(x)^{-1}.$$

Also ist die Jakobimatrix von $Df|_U^{-1}(f|_U(1,1))$ gegeben durch

$$J_{f^{-1}}(1,1) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H8.1 (6 Punkte)

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 - y^2$. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen der Gradient von f verschwindet. Gibt es relative Extremstellen von f?

(b) Es sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = x^4 + y^2 - 2$. Bestimmen Sie alle Stellen, in denen g ein relatives Extremum hat.

Lösung:

(a) $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -2y)^T$. Der Gradient von f verschwindet nur an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,0)$.
Es gilt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

H_f ist indefinit in $(0,0)$, also liegt dort kein Extremum vor, sondern ein Sattelpunkt.

(b) Für alle (x, y) gilt

$$g(x, y) \geq 0 + 0 - 2 = g(0, 0).$$

Also hat g an der Stelle $(0, 0)$ ein relatives Extremum. Es gilt $\operatorname{grad} g(x, y) = (4x^3, 2y)^T$. Der Gradient von g verschwindet nur an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Also ist $(0, 0)$ die einzige Stelle, an der f ein relatives Extremum hat.

Aufgabe H8.2 (6 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2).$$

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion f, und entscheiden Sie, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

Lösung: Als erstes bestimmen wir die partiellen Ableitungen von f bis einschließlich 2. Ordnung:

$$f_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2) - 4x, \quad f_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2) + 4y$$
$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 4y^2 - 4, \quad f_{yy}(x, y) = 4x^2 + 12y^2 + 4, \quad f_{xy}(x, y) = 8xy = f_{yx}(x, y).$$

Notwendige Bedingung für die Existenz von Extrema ist $\operatorname{grad} f(x, y) = 0$. Wir lösen das zugehörige Gleichungssystem:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(I)} & 4x(x^2 + y^2) - 4x = 0 \\ \text{(II)} & 4y(x^2 + y^2) + 4y = 0 \end{cases}$$

Falls $x = 0$, so ist (I) erfüllt und für (II) ergibt sich:

$$y^3 + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \vee y^2 + 1 = 0.$$

Also ist in diesem Fall $(0, 0)$ ein stationärer Punkt.
Falls $y = 0$, so ist (II) erfüllt und für (I) ergibt sich:

$$x^3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \pm 1.$$

Also sind in diesem Fall $(0, 0), (1, 0)$ und $(-1, 0)$ stationäre Punkte.
Falls $x, y \neq 0$, so erhalten wir aus (I) $\cdot y$ - (II) $\cdot x$ die Gleichung

$$-8xy = 0,$$

welche nicht erfüllt ist, da $xy \neq 0$.
Also sind $(0, 0), (1, 0)$ und $(-1, 0)$ alle stationären Punkte von f.
Nun überprüfen wir für diese drei Punkte die hinreichende Bedingung.
Für $(0, 0)$ ist

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

indefinit. somit liegt in $(0, 0)$ kein Extremum vor. $(0, 0)$ ist ein Sattelpunkt.
Für $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ ist

$$H_f(1, 0) = H_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

positiv definit und somit liegt in $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ ein Minimum vor.
(Aufgrund der Symmetrie $f(-x, y) = f(x, y)$ weiß man auch ohne Nachweis der hinreichenden Bedingung, dass in $(-1, 0)$ ebenfalls ein Minimum vorliegt.)

Aufgabe H8.3 (6 Punkte)
Zeige, dass die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

für jedes $(x, y) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar ist. Ist F auch global umkehrbar? Bestimme das Urbild $F^{-1}(\{(a, b)\})$ eines beliebigen Punktes $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Lösung: Offensichtlich ist F stetig differenzierbar. Für die lokale Umkehrung müssen wir (nach Forster II Satz 3, Paragraph 8) zeigen, dass $DF(x,y)$ für alle $(x,y) \neq 0$ invertierbar ist. Da gilt

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \det(DF(x,y)) = 4(x^2+y^2)$$

folgt, dass $DF(x,y)$ für alle $(x,y) \neq 0$ invertierbar ist.
Die Funktion F ist aber nicht global invertierbar, denn F ist nicht injektiv: Ist $F(x,y) = (a,b)$, so gilt auch $F(-x,-y) = (a,b)$.
Nun wollen wir das Urbild eines beliebigen Punktes $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bestimmen: Sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ beliebig. Wir suchen die Menge alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $F(x,y) = (a,b)$. Es gilt

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \implies 2xy = b.$$

Wir untersuchen nun zwei Fälle:

$b \neq 0$ Dann gilt $y \neq 0$ und damit $x = \frac{b}{2y}$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{4y^2} - y^2 = a \quad &\overset{y\neq 0}{\iff} \quad y^4 + ay^2 - \frac{b^2}{4} = 0 \\ &\implies \quad y^2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} \\ &\overset{y^2>0}{\implies} \quad y^2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} \\ &\implies \quad y = \pm\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ & \quad x = \pm\frac{b}{2\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}} \end{aligned}$$

$b = 0$ Dann gilt $x = 0$ oder $y = 0$ (und $a \neq 0$). Ist $a > 0$, so muss $y = 0$ und $x = \pm\sqrt{a}$ gelten. Ist $a < 0$, so muss $x = 0$ und $y = \pm\sqrt{a}$ gelten.