Analysis II für M, LaG/M, Ph
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
03.12.2010

Gruppenübung

Aufgabe G7.1

Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=\cos x\sin y\exp(z)$. Bestimmen Sie das 3-te Taylorpolynom von f in $(0,0,0)$ unter Verwendung der folgenden zwei Arten:

(a) durch den Satz von Langrange-Taylor;

(b) durch das Multiplizieren der Potenzreihen von den Funktionen $\exp(z), \cos x, \sin y$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
&D^{(1,0,0)}f(x,y,z)=-\sin x\sin y\exp(z), && D^{(0,1,0)}f(x,y,z)=\cos x\cos y\exp(z),\\
&D^{(0,0,1)}f(x,y,z)=\cos x\sin y\exp(z), && D^{(1,1,0)}f(x,y,z)=-\sin x\cos y\exp(z),\\
&D^{(1,0,1)}f(x,y,z)=-\sin x\sin y\exp(z), && D^{(0,1,1)}f(x,y,z)=\cos x\cos y\exp(z),\\
&D^{(2,0,0)}f(x,y,z)=-\cos x\sin y\exp(z), && D^{(0,2,0)}f(x,y,z)=-\cos x\sin y\exp(z),\\
&D^{(0,0,2)}f(x,y,z)=\cos x\sin y\exp(z), && D^{(0,1,2)}f(x,y,z)=\cos x\cos y\exp(z),\\
&D^{(0,2,1)}f(x,y,z)=-\cos x\sin y\exp(z), && D^{(1,0,2)}f(x,y,z)=-\sin x\sin y\exp(z),\\
&D^{(1,1,1)}f(x,y,z)=-\sin x\cos y\exp(z), && D^{(1,2,0)}f(x,y,z=\sin x\sin y\exp(z),\\
&D^{(2,0,1)}f(x,y,z)=-\cos x\sin y\exp(z), && D^{(2,1,0)}f(x,y,z)=-\cos x\cos y\exp(z),\\
&D^{(0,3,0)}f(x,y,z)=-\cos x\cos y\exp(z), && D^{(0,0,3)}f(x,y,z)=\cos x\sin y\exp(z),\\
&D^{(3,0,0)}f(x,y,z)=\sin x\sin y\exp(z).
\end{aligned}$$

Also gilt auf dem Punkt $(0,0,0)$:

$$\begin{aligned}
&f(0,0,0)=0,\\
&D^{(0,1,0)}f(0,0,0)=D^{(0,1,1)}f(0,0,0)=D^{(0,1,2)}f(0,0,0)=1,\\
&D^{(2,1,0)}f(0,0,0)=D^{(0,3,0)}f(0,0,0)=-1,
\end{aligned}$$

und für die andere Fällen für α gilt $D^\alpha f(0,0,0)=0$.

Deshalb ist das 3-te Taylorpolynomial von f in $(0,0,0)$ gleich

$$\begin{aligned}
T_p^3 f\left((x,y,z),(0,0,0)\right) &= \sum_{|\alpha|\le 3}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(0,0,0)(x,y,z)^\alpha\\
&= y+yz+\frac{1}{2}yz^2-\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}y^3.
\end{aligned}$$

(b) Das gleiche Ergebnis folgt durch das Multiplizieren der 3-ten Taylorpolynomialen von $\cos x, \sin y$, and $\exp z$ in 0:

$$\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)\cdot\left(y-\frac{1}{6}y^3\right)\cdot\left(1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3\right) = y+yz+\frac{1}{2}yz^2-\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}y^3+\dots.$$

⊣

Aufgabe G7.2
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das n-te Polynom $T_p^n f(x,y)$ von f in $(0,0)$.

(a) Bestimmen Sie das 2-te Taylor Polynom $T_p^2 f(x,y)$ von f in $(0,0)$.

(b) Sein ein Konstant $c > 0$, sodass $\max\{|f_{xx}(u)|, |f_{yy}(u)|, |f_{xy}(u)|\} \leq c$, für alle $|u| \leq 0.1$. Zeigen Sie, dass der Abstand zwischen $f(0.1, 0.1)$ und $T_p^1 f(0.1, 0.1)$ kleiner oder gleich als $2c \cdot (0.1)^2$ ist.

Lösung:

(a) Wir wissen, dass $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$ für alle x. Also gilt

$$\sin(x^2+y^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (x^2+y^2)^{2n+1}.$$

Um das 2-te Taylor zu bestimmen, brauchen wir nur die Potenzen von x und y, die kleiner als 3 sind. Also nehmen wir nur die erste Komponente der letzten Reihe. Das heißt

$$T_p^2 f(x,y) = \frac{(-1)^0}{1!} \cdot (x^2+y^2)^1 = x^2+y^2.$$

[Man kann auch die Definition von Taylorpolynom benutzen aber in diesem Fall muss man die Ableitungen f_x, f_y, f_{xy}, f_{xx} und f_{yy} in $(0,0)$ berechnen.]

(b) Es gilt $f(0.1, 0.1) - T_f^1(0.1, 0.1) = R_2$ wobei

$$R_2 = \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f}{\alpha!}(0+\tau \cdot 0.1, 0+\tau 0.1) \cdot (0.1, 0.1)^\alpha$$

für ein $\tau \in [0,1]$.

[$(0.1,0.1)^\alpha = (0.1)^{\alpha_1} \cdot (0.1)^{\alpha_2}$, wenn $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.] $|\alpha| = 2$ heißt: $\alpha = (2,0)$ oder $\alpha = (1,1)$ oder $\alpha = (0,2)$. Also

$$R_2 = \frac{1}{2!} f_{xx}(\tau \cdot 0.1, \tau \cdot 0.1) \cdot (0.1)^2 + \frac{1}{1!} f_{xy}(\tau \cdot 0.1, \tau \cdot 0.1) \cdot (0.1)^2 + \frac{1}{2!} f_{yy}(\tau \cdot 0.1, \tau \cdot 0.1) \cdot (0.1)^2.$$

Nach der Voraussetzung für $c > 0$, folgt

$$|R_2| \leq \frac{c}{2} \cdot (0.1)^2 + c \cdot (0.1)^2 + \frac{c}{2} \cdot (0.1)^2 = 2c \cdot (0.1)^2.$$

⊣

Aufgabe G7.3
Sei eine differenzierbare Funktion $f : D = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die $f'(x,y) = (5,0)$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein Konstant $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x,y) = 5x + c$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Wir zeigen, dass $f(x,y) = 5x + f(0,0)$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Sei $x, y \in \mathbb{R}$. Nach dem Mittelwertsatz gibt ein $\tau \in [0,1]$, sodass

$$f(x,y) - f(0,0) = f'(0+\tau \cdot x, 0+\tau \cdot y) \cdot ((x,y) - (0,0)).$$

Nach Voraussetzung folgt $f'(\tau \cdot x, \tau \cdot y) = (5,0)$. Also

$$f(x,y) - f(0,0) = (5,0) \cdot (x,y) = 5x.$$

⊣

Hausübung

Aufgabe H7.1 (6 Punkte)
Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x\cdot\exp(\cos y)$. Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom von f in $(0,0)$ unter Verwendung der folgenden zwei Arten:

(a) durch den Satz von Langrange-Taylor;

(b) durch die Komposition der Potenzreihen von den Funktionen $\exp(x), \cos x$.

Hinweis für (b). Bestimmen Sie erstes ein Polynom $q(y)$, sodass $\cos y\approx q(y)$ und dann betrachten Sie die Funktion $\exp(q(y))$.

Lösung:

(a) Wir berechnen

$$\begin{array}{ll} f_x(x,y)=\exp(\cos y), & f_y(x,y)=-x\sin y\cdot\exp(\cos y) \\ f_{xy}(x,y)=-\sin y\cdot\exp(\cos y), & \\ f_{xx}(x,y)=0, & f_{yy}(x,y)=\exp(\cos y)\cdot[(\sin y)^2-x\cos y]. \end{array}$$

Also

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \exp(\cos 0)=\exp(1)=e, \\ f_y(0,0) &= f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=f_{xy}(0,0)=0. \end{aligned}$$

Deshalb

$$T_p^2 f(x,y)=f_x(0,0)\cdot(x-0)=e\cdot x.$$

(b) Wir wissen, dass

$$\exp(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots,\ \text{und}\ \cos(y)=1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\dots.$$

Also ist $\cos(y)$ fast gleich $1-\frac{y^2}{2!}=q(y)$ und weiterhin

$$\begin{aligned} \exp(\cos y) &\approx \exp(1-\frac{y^2}{2!}) \\ &= e\cdot\exp(-\frac{y^2}{2!}) \\ &\approx e\cdot(1-\frac{y^2}{2!}) \\ &= e-e\cdot\frac{y^2}{2!}. \end{aligned}$$

Deshalb

$$f(x,y)=x\cdot\exp(\cos y)\approx e\cdot x-e\cdot\frac{xy^2}{2!}$$

Somit $T_f^2(x,y)=e\cdot x$.

⊣

Aufgabe H7.2 (6 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: f(x,y)=\cos(2x+3y)$. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ betrachten wir das n-te Polynom $T_p^n f(x,y)$ von f in $(0,0)$.

(a) Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom $T_p^2 f(x,y)$ von f in $(0,0)$.

(b) Bestimmen Sie die partielle Ableitungen f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} auf jedem Punkt $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

(c) Zeigen Sie (ohne die Benutzung eines Rechners), dass der Abstand zwischen $f(0.1,0.1)$ und $T_p^1 f(0.1,0.1)$ kleiner oder gleich als 0.125 ist.

Lösung:

(a) Wir wissen, dass $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also

$$\cos(2x+3y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot (2x+3y)^{2n}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Da wir die 2-te Taylorpolynom bestimmen müssen, nehmen wir die Fällen $n = 0$ und $n = 1$. Das heißt

$$T_p^2 f(x,y) = 1 - \frac{1}{2} \cdot (2x+3y)^2 = 1 - 2x^2 - 6xy - \frac{9}{2} \cdot y^2.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} &f_x(x,y) = -2\sin(2x+3y), && f_y(x,y) = -3\sin(2x+3y) \\ &f_{xy}(x,y) = -6\cos(2x+3y), && \\ &f_{xx}(x,y) = -4\cos(2x+3y), && f_{yy}(x,y) = -9\cos(2x+3y). \end{aligned}$$

(c) Es gilt $f(0.1, 0.1) - T_f^1(0.1, 0.1) = R_2$ wobei

$$R_2 = \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f}{\alpha!}(0 + \tau \cdot 0.1, 0 + \tau 0.1) \cdot (0.1, 0.1)^\alpha$$

für ein $\tau \in [0,1]$. Also

$$R_2 = \frac{1}{2!} f_{xx}(\tau \cdot 0.1, \tau \cdot 0.1) \cdot (0.1)^2 + \frac{1}{1!} f_{xy}(\tau \cdot 0.1, \tau \cdot 0.1) \cdot (0.1)^2 + \frac{1}{2!} f_{yy}(\tau \cdot 0.1, \tau \cdot 0.1) \cdot (0.1)^2.$$

Nach (b) folgt $|f_{xx}(\tau \cdot 0.1, \tau \cdot 0.1)| \leq 4$, $|f_{xy}(\tau \cdot 0.1, \tau \cdot 0.1)| \leq 6$ und $|f_{yy}(\tau \cdot 0.1, \tau \cdot 0.1)| \leq 9$. Deshalb

$$|R_2| \leq \frac{4}{2} \cdot (0.1)^2 + 6 \cdot (0.1)^2 + \frac{9}{2} \cdot (0.1)^2 = 12.5 \cdot (0.1)^2 = 0.125.$$

⊣

Aufgabe H7.3 (6 Punkte)
Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass $f(0,0) = 0$ und $f'(x,y) = (x \;\; y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ein $\tau \in [0,1]$ gibt, sodass

$$f(x,y) = \tau \cdot (x^2 + y^2).$$

Lösung:

Nach dem Mittelwertsatz gibt ein $\tau \in [0,1]$, sodass

$$f(x,y) - f(0,0) = f'(0 + \tau \cdot x, 0 + \tau \cdot y) \cdot ((x,y) - (0,0)).$$

Wir nehmen $\xi = (\tau \cdot x, \tau \cdot y) = \tau \cdot (x,y)$. Nach Voraussetzung folgt $f'(\xi) = (\tau \cdot x \;\; \tau \cdot y)$. Also

$$f(x,y) = f(0,0) + f'(\xi) \cdot (x,y) = (\tau \cdot x, \tau \cdot y) \cdot (x,y) = \tau \cdot x^2 + \tau \cdot y^2.$$

⊣