Analysis II für M, LaG/M, Ph
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
26.11.2010

Gruppenübung

Aufgabe G6.1

(a) Gegeben seien die Matritzen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Produkte AB, BA, A^2, B^2 wann immer diese definiert sind.

(b) In $\mathbb{R}^2$ beschreibe die lineare Abbildung A die Spiegelung an der Geraden $\{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$. Geben sie die Abbildungsmatrizen von A bezüglich der Standardbasis und der Basis $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ an. Hierbei sind im Definitionsbereich und im Wertebereich die selben Basen zu wählen, wer möchte kann natürlich alle Kombinationen diskutieren.

Lösung:

(a) AB und B^2 machen keinen Sinn. Weiter gilt

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bezüglich der Standardbasis hat A die Matrixdarstellung

$$A_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und bezüglich der angegebenen Basis gilt

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G6.2

In einem 2-dimensionalen Vektorraum X seien die beiden Basen $\alpha : \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2$ und $\beta : w_1, w_2$ gegeben. Weiter gelte die Beziehung $w_j = w_{1j}\mathsf{v}_1 + w_{2j}\mathsf{v}_2$, wobei

$$T := \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a) Es sei $x = x^{\beta_1}w_1 + x^{\beta_2}w_2$, $(x^{\beta_1}, x^{\beta_2}) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2} \in \mathbb{R}$, so dass $x = x^{\alpha_1}\mathsf{v}_1 + x^{\alpha_2}\mathsf{v}_2$.
(Sie bestimmen hier also zu gegebener Koordinatenspalte $(x^{\beta_1}, x^{\beta_2})^T$ von x bezüglich β eine Koordinatenspalte von x bezüglich α.)

(b) Wir betrachten die Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2}$, falls $x = x^{\alpha_1} v_1 + x^{\alpha_2} v_2$. Die Abbildungsmatrix von f (f ist linear!) bezüglich α ist also gegeben durch $f_\alpha = (a_1 \quad a_2)$.
Bestimmen Sie nun $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = b_1 y_1 + b_2 y_2$, falls $x = x^{\beta_1} w_1 + x^{\beta_2} w_2$ und stellen Sie $f(x)$ als Produkt der Matrizen f_α, T, T^{-1} dar.

Lösung:

(a) Es gilt $x^\alpha = T x^\beta$ wobei x^α die Darstellung (Koordinatenspalte) von x bzgl. α und x^β die Darstellung von x bzgl. β ist.

(b) $(b_1, b_2)^T = b = f_\alpha T x^\beta$.

Aufgabe G6.3
Es sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von A an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(b) Nach (a) gilt für $f(x) = x$ also $f = Id$, dass $Df(x) = Id$. Ist $n = m = 1$, so schrieb man in Analysis I: $f'(x) = 1$. Diskutieren Sie diese scheinbare Inkonsistenz.

Lösung: Es gilt
$$\frac{A(x_0 + \Delta x) - A(x_0) - A(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = \frac{A(x_0) + A(\Delta x) - A(x_0) - A(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = 0.$$
Daher ist die Ableitung der linearen Funktion A an der Stelle x_0 gegeben durch A.
Die Schreibweise $f'(x) = 1$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschreibt die Abbildungsmatrix. Die zugehörige lineare Abbildung ist offensichtlich $1 \cdot x = Id(x)$.

Hausübung

Aufgabe H6.1 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Jakobimatrizen der folgenden Funktionen

i. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (\log(1 + x^2 + z^2), z^2 + y^2 - x^2, \sin(xz))$

ii. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (xy, \cosh(xy), e^{x^2})$

(b) Es sei X ein zweidimensionaler reeller Vektorraum und $E = \{e_1, e_2\}$ eine Basis. Weiter sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$h(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \sin \alpha_1.$$

i. Berechnen Sie die Jakobimatrix von h bezüglich E.

ii. Es sei $b_1 = e_1 - e_2$ und $b_2 = 2e_2$. Berechnen Sie die Jakobimatrix von h bezüglich der Basis $\{b_1, b_2\}$.

Lösung:

(a)
$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2+z^2} & 0 & \frac{2z}{1+x^2+z^2} \\ -2x & 2y & 2z \\ z\cos(xz & 0 & x\cos(xz) \end{pmatrix}$$
$$J_g = \begin{pmatrix} y & x \\ y\sinh(xy) & x\sinh(xy) \\ 2xe^{x^2} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) i. Die Jakobimatrix von h bzgl. E ist gegeben durch $J_{h,E} = (2(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos \alpha_1, 2(\alpha_1 + \alpha_2))$.

ii. Für $x \in X$ gilt
$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 = \beta_1(e_1 - e_2) + \beta_2 2e_2 = \beta_1 e_1 + (-\beta_1 + 2\beta_2)e_2.$$
Daher folgt $\alpha_1 = \beta_1$ und $\alpha_2 = -\beta_1 + 2\beta_2$, bzw. $\beta_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$. Demnach ist $h(x) = h(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) = 4\beta_2^2 + \sin \beta_1$ und daher ergibt sich die Jakobimatrix von h bzgl. B
$$J_{h,B} = (\cos \beta_1, 8\beta_2).$$

Aufgabe H6.2 (6 Punkte)
Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine bilineare Funktion. Das heißt, für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\beta(x,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\beta(\cdot,x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung.

(a) Berechnen Sie die Ableitung $d\beta$ von β.

(b) Beweisen sie, daß $d\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine lineare Abbildung ist. (Hier bezeichnet $\mathscr{L}(X,Y)$ die Menge aller linearen Abbildungen zwischen den Vektorräumen X und Y.

(c) Ist β stetig differenzierbar?

Lösung:

(a) Es gilt $\beta(x+\mathsf{v}, y+w) = \beta(x, y+w) + \beta(\mathsf{v}, y+w) = \beta(x,y) + \beta(x,w) + \beta(\mathsf{v},y) + \beta(\mathsf{v},w)$. Somit folgt $\beta(x+\mathsf{v}, y+w) - \beta(x,y) - (\beta(x,w) + \beta(\mathsf{v},y)) = -\beta(\mathsf{v},w)$.

Das heißt, die Funktion $(\mathsf{v},w) \mapsto \beta(x,w)+\beta(\mathsf{v},y)$, die für festes (x,y) linear ist, ist die Ableitung $d\beta(x,y)$ von β an der Stelle (x,y), falls $|-\beta(\mathsf{v},w)|/\|(\mathsf{v},w)\|$ gegen 0 konvergiert. Dies sieht man wie folgt ein: Zuerst wählen wir eine Basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ und stellen v und w in der Basis dar. D.h. $\mathsf{v} = \sum_{i=1}^n \mathsf{v}_i e_i$ und $w = \sum_{i=1}^n w_i e_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|\beta(\mathsf{v},w)| &= |\sum_{i,j=1}^n \mathsf{v}_i w_j \beta(e_i,e_j)| \\
&\le \sum_{i,j=1}^n |\mathsf{v}_i w_j||\beta(e_i,e_j)| \\
&\le \max_{i,j=1,\dots,n}\{|\beta(e_i,e_j)|\} \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2}(|\mathsf{v}_i|^2 + |w_j|^2) \\
&\le \max_{i,j=1,\dots,n}\{|\beta(e_i,e_j)|\} n \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(|\mathsf{v}_i|^2 + |w_i|^2)
\end{aligned}$$

Wählt man auf $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ als Norm $\|(\mathsf{v},w)\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n(|\mathsf{v}_i|^2 + |w_i|^2)}$, so sieht man schnell, dass $|-\beta(\mathsf{v},w)|/\|(\mathsf{v},w)\| \le C\|(\mathsf{v},w)\|$ gilt, also folgt $|-\beta(\mathsf{v},w)|/\|(\mathsf{v},w)\| \to 0$, falls $\|(\mathsf{v},w)\| \to 0$. Damit ist die Ableitung $d\beta(x,y)$ an der Stelle (x,y) gegeben durch

$$(\mathsf{v},w) \mapsto \beta(x,w) + \beta(\mathsf{v},y)$$

(b) Die Abbildung $d\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist linear, falls sie für jedes $(\mathsf{v},w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ linear in (x,y) ist. Dies folgt aber wegen der Linearität von $\beta(\cdot,w)$ bzw. $\beta(\mathsf{v},\cdot)$

$$\beta(ax_1 + bx_2, w) + \beta(\mathsf{v}, ay_1 + by_2) = a(\beta(x_1,w) + \beta(\mathsf{v},y_1)) + b(\beta(x_2,w) + \beta(\mathsf{v},y_2))$$

also $d\beta(ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2) = ad\beta(x_1,y_1) + bd\beta(x_2,y_2)$.

(c) Ja, denn $d\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist nach (b) linear. Da $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ endlichdimensional ist, ist $d\beta$ auch stetig.

Aufgabe H6.3 (6 Punkte)
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt positiv homogen vom Grade $\alpha \in \mathbb{R}$, falls

$$f(tx) = t^\alpha f(x),\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ t > 0.$$

(a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f genau dann homogen vom Grade α, wenn die Eulersche Relation

$$\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x),\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

gilt.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen F und h, wobei $F, h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $F(t) := f(tx)$ und $h(t) = t^{-\alpha} f(tx)$ gegeben sind. Verwenden Sie dann die Kettenregel.

(b) Es sei f positiv homogen vom Grade 1 und in $\mathbb{R}^n$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass f linear ist.

Lösung:

(a) Wir setzen $F(t) := f(tx) = t^\alpha f(x)$. Für die Ableitung nach t von F erhält man mit der Kettenregel einerseits $F'(t) = \nabla f(tx) \cdot x$ und andererseits $F'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$. Setzt man $t = 1$ so folgt die Eulersche Relation.

Gilt umgekehrt die Euler Relation, so betrachten wir die Hilfsfunktion $h(t) = t^{-\alpha} f(tx)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} h'(t) &= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx) + t^{-\alpha} \nabla f(tx) \cdot x \\ &= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx) + t^{-\alpha-1} \alpha f(tx) \\ &= 0 \end{aligned}$$

also ist h konstant und damit $f(x) = h(1) = h(t) = t^{-\alpha} f(tx)$, was die Homogenität zeigt.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - \nabla f(0) \cdot x}{\|x\|} &= f(x/\|x\|) - \nabla f(0) \cdot (x/\|x\|) \\ &= (\nabla f(x/\|x\|) - \nabla f(0)) \cdot (x/\|x\|). \end{aligned}$$

Ist f im Nullpunkt differenzierbar, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \nabla f(0) \cdot x}{\|x\|} \\ &= \lim_{x\to 0} (\nabla f(x/\|x\|) - \nabla f(0)) \cdot (x/\|x\|) \end{aligned}$$

Lässt man nun x auf einer Geraden durch den Nullpunkt gegen Null gehen, so hängt der Ausdruck $(\nabla f(x/\|x\|) - \nabla f(0)) \cdot (x/\|x\|)$ nicht mehr von x ab. Also folgt $(\nabla f(x/\|x\|) - \nabla f(0)) \cdot (x/\|x\|) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und daher auch $f(x) - \nabla f(0) \cdot x = 0$. Dies zeigt die Linearität von f.