Analysis II für M, LaG/M, Ph
5. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
19.11.2010

Gruppenübung

Aufgabe G5.1

(a) Beweisen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = x \cdot y$ gleich $(y \;\; x)$ ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion: $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : g(x,y) = e^{x \cdot y}$.

(c) Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und der Vektor $u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Berechnen Sie die Richtungsableitung $\mathrm{d}_u f(3,2,1)$.

Lösung:

(a) Sei $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wir definieren

$$r(h_1,h_2) := f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - A \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

für $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$, wobei $A = (y \;\; x)$. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$. Wir berechnen $f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) = xh_2 + yh_1 + h_1h_2$ und $A \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = yh_1 + xh_2$. Also

$$r(h_1,h_2) = xh_2 + yh_1 + h_1h_2 - (yh_1 + xh_2) = h_1h_2.$$

Da $|\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}| \le \frac{|h_1|}{|h_1|} = 1$, folgt dass

$$\frac{|r(h_1,h_2)|}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le |h_2| \xrightarrow{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0.$$

Damit $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$.

(b) Wir betrachten die Funktion $h(z) = e^z$, $z \in \mathbb{R}$ und wir beachten, dass $g(x,y) = h(f(x,y))$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$, wobei $f(x,y) = x \cdot y$, $x,y \in \mathbb{R}$. Nach der Kettenregel und (a) folgt

$$Dg(x,y) = h'(f(x,y)) \cdot Df(x,y) = e^{xy} \cdot (y \;\; x) = (ye^{xy} \;\; xe^{xy}).$$

(c) Es gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$ für alle $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Die analoge Gleichungen gelten für $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$.

Da $d_u f(p) = \langle \mathrm{grad} f(p) | u \rangle$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} d_u f(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \cdot (x_0 + y_0 + z_0), \end{aligned}$$

für alle $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Insbesondere gilt

$$d_u f(3,2,1) = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{9+4+1}} \cdot (3+2+1) = \frac{6}{\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{42}}{7}.$$

$\dashv$

Aufgabe G5.2

Sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Die Gleichung der Tangentialebene von der Fläche $z = f(x,y)$ an der Stelle (x_0, y_0) ist so definiert:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Bestimmen Sie die Gleichung und einen Normalenvektor der Tangentialebene der Fläche $z = f(x,y)$ an der Stelle $(1,1)$, wenn $f(x,y) = 5x^2 + y^3$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Wir berechnen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 10x_0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 3y_0^2$. Also $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 10$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3$. Deshalb die Gleichung der Tangentialebene der Fläche $z = f(x,y)$ an der Stelle $(1,1)$ ist

$$z = f(1,1) + 10 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-1) = 10x + 3y - 7.$$

Ein Normalenvektor der Tangentialebene $z = 10x + 3y - 7$ ist $(10, 3, -1)$.
[Wenn eine Ebene durch die Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ definiert ist, ist ein Normalenvektor gleich (A,B,C).] $\dashv$

Aufgabe G5.3

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die so definiert ist: $f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2}$, wenn $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$. Zeigen Sie, dass

(a) die Funktion f stetig in $(0,0)$ ist,

(b) jede Richtungsableitung $d_u f(0,0)$ (für $u \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\|_2 = 1$) existiert, und

(c) die Funktion f nicht differenzierbar in $(0,0)$ ist.

Lösung:

(a) Beachten Sie, dass

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{|y|^3}{y^2} = \frac{y^2|y|}{y^2} = |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y) - (0,0)\|.$$

Also ist die Funktion f stetig in $(0,0)$.

(b) Sei $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\| = 1$. Dann

$$\begin{aligned} d_u f(0,0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + tu) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 u_2^3}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2} \\ &= \frac{u_2^3}{u_1^2 + u_2^2} = \frac{u_2^3}{\|u\|^2} = u_2^3. \end{aligned}$$

(Insbesondere $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$).

(c) Wenn f differenzierbar in $(0,0)$ wäre, würde die Ableitung $Df(0,0)$ gleich $(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0))$ sein. Nach (b) folgt $Df(0,0) = (0\ 1)$. Nach der Definition gibt eine Funktion $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$ und

$$f(x,y) = f(0,0) + (0\ 1) \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} + r(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wir berechnen

$$r(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - (0 + 1 \cdot y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} - y$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Insbesondere

$$\begin{aligned} r(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) &= \frac{1/n^3}{1/n^2 + 1/n^2} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1/n^3}{2/n^2} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n^2}{2n^3} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\|(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\| = \frac{\sqrt{2}}{n}$ folgt

$$\frac{r(\frac{1}{n},\frac{1}{n})}{\|(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\|} = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{n}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist aber ein Widerspruch, weil $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$.

⊣

Hausübung

Aufgabe H5.1 (6 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = x^2 + y^2$ gleich $(2x\ 2y)$ ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : g(x,y) = \cos(x^2+y^2)$.

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Fläche $z = f(x,y)$ an der Stelle $(1,1)$, wenn $f(x,y) = e^x \cdot y^2$, $x,y \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Sei $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wir definieren

$$r(h_1,h_2) := f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - A \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

für $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$, wobei $A = (2x\ 2y)$. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$. Wir berechnen $f(x+h_1,y+h_2) - f(x,y) = 2xh_1 + 2yh_2 + h_1^2 + h_2^2$ und

$$A \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (2x\ 2y) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2xh_1 + 2yh_2.$$

Also $r(h_1,h_2) = h_1^2 + h_2^2$ und weiterhin gilt

$$\frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \sqrt{h_1^2+h_2^2} \xrightarrow{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0.$$

(b) Wir betrachten die Funktion $h(z) = \cos(z)$, $z \in \mathbb{R}$ und wir beachten, dass $g(x,y) = h(f(x,y))$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$. Nach der Kettenregel und (a) folgt

$$Dg(x,y) = h'(f(x,y)) \cdot Df(x,y) = -\sin(x^2+y^2) \cdot (2x \;\; 2y).$$

(c) Wir berechnen $f(1,1) = e$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = e^{x_0} y_0^2$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0 e^{x_0}$. Also $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = e$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2e$. Deshalb die Gleichung der Tangentialebene der Fläche $z = f(x,y)$ an der Stelle $(1,1)$ ist

$$z = e + e \cdot (x-1) + 2e \cdot (y-1) = ex + 2ey - 2e.$$

Aufgabe H5.2 (6 Punkte)

(a) Es sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \text{ und } x \neq 0\}$. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die so definiert ist: $f(x,y) = e^x - 1$, wenn $(x,y) \in M$ und $f(x,y) = 0$, wenn $(x,y) \notin M$. Man zeige, dass die Richtungsableitung $d_u f(0,0)$ existiert, wobei $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \{(x,y) \mid x + y > 0\} \to \mathbb{R} : f(x,y) = \log(x+y)$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung $d_u f(1,0)$, wobei $u = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

Lösung:

(a) Nach der Definition

$$d_u f(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+tu) - f(0,0)}{t}.$$

Für $t \neq 0$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{f((0,0)+t\cdot u) - f(0,0)}{t} &= \frac{f(t/\sqrt{2}, t/\sqrt{2})}{t} \\ &= \frac{e^{t/\sqrt{2}} - 1}{t}. \end{aligned}$$

Die Grenze $\lim_{t\to 0} \frac{e^{t/\sqrt{2}} - 1}{t}$ liefert $\frac{0}{0}$, also nach der Regel von L' Hospital folgt

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{t/\sqrt{2}} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{t/\sqrt{2}}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Also existiert die Richtungsableitung $d_u f(0,0)$ und sie ist gleich $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Nach der Definition

$$d_u f(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((1,0)+tu) - f(1,0)}{t}.$$

Wir berechnen $f(1,0) = \log(1) = 0$ und

$$f((1,0)+tu) = f(1 + \frac{2t}{\sqrt{5}}, \frac{t}{\sqrt{5}}) = f(\frac{2t+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}, \frac{t}{\sqrt{5}}) = \log(\frac{3t+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}).$$

Also

$$d_u f(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\log(\frac{3t+\sqrt{5}}{\sqrt{5}})}{t}.$$

Diese Grenze liefert $\frac{0}{0}$, also nach der Regel von L' Hospital folgt

$$d_u f(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{(3t+\sqrt{5})/5} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \lim_{t\to 0} \frac{15}{\sqrt{5}(3t+\sqrt{5})} = 3.$$

$\dashv$

Aufgabe H5.3 (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, wenn $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$. Beweisen Sie, dass die Richtungsableitung $d_u f(0,0)$ existiert für alle $u \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\|_2 = 1$, aber die Funktion f ist nicht stetig in $(0,0)$.

Lösung:

Sei $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\| = 1$. Für $t \neq 0$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
d_u f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+tu) - f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{(tu_1)t^2u_2^2}{t^2u_1^2 + t^4u_2^4} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{u_1u_2^2}{u_1^2 + t^2u_2^4} \\
&= \frac{u_1u_2^2}{u_1^2} = \frac{u_2^2}{u_1},
\end{aligned}$$

(falls $u_1 \neq 0$). Falls $u_1 = 0$, gilt $f((0,0)+t(u_1,u_2)) = f(0,tu_2) = 0$. Deshalb

$$d_u f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+tu) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

Somit existiert die Richtungsableitung $d_u f(0,0)$ für jedes $u \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\| = 1$.
Nun zeigen wir, dass die Funktion f nicht stetig in $(0,0)$ ist. Wir definieren $x_n = \frac{1}{n^2}$ uns $y_n = \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $(x_n, y_n) \to (0,0)$ und

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}} = \frac{1}{2}.$$

Somit $f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \not\to f(0,0)$; also ist f nicht stetig in $(0,0)$. $\dashv$