# Analysis II für M, LaG/M, Ph
# 4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Christian Herrmann**
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

**WS 2010/11**
**12.11.2010**

## Gruppenübung

**Aufgabe G4.1**
Es seien $X, Y$ endlich-dimensionale normierte Vektorräume. Zeigen Sie, dass jede lineare Abbildung $A : X \to Y$ Lipschitz-stetig ist. D.h. es gibt eine Konstante $L > 0$, so dass

$$\|Ax - Ay\|_Y \leq L\|x - y\|_X, \qquad \text{für alle } x, y \in X.$$

**Hinweis:** Zeigen Sie zunächst $\|Ax\|_Y \leq C\|x\|$ für alle $x \in X$, für eine geeignete Norm $\|\cdot\|$ auf $X$.

**Lösung:** Zunächst sei bemerkt, dass wegen der Äquivalenz aller Normen in einem endlichdimensionalen Vektorraum die Stetigkeit bzgl. einer beliebigen Norm gezeigt werden kann. Wir wählen zunächst eine Basis auf $X$ und bezeichnen diese etwa mit $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Für $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ setzen wir $\|x\|_X := \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$. Dies definiert eine Norm auf $X$. (Beweis analog zum Beweis, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.)
Weiter gilt wegen der Linearität von $A$

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_Y = \|A\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|_Y &= \|\sum_{i=1}^n \alpha_i Ae_i\|_Y \\
&\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|\|Ae_i\|_Y \\
&\leq \max_{i=1,\ldots,n} \|Ae_i\|_Y \|x\|_X.
\end{aligned}$$

Damit folgt also $\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$ mit $C = \max_{i=1,\ldots,n} \|Ae_i\|_Y$.
Wegen der Linearität von $A$ folgt nun die Lipschitzstetigkeit mit $\|Ax - Ay\|_Y = \|A(x - y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X$, also ist $A$ auch stetig.

**Aufgabe G4.2**
Es sei $\mathbb{N}$ ausgestattet mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik, d.h. $d(n, m) = |n - m|$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Geben Sie alle stetigen Funktionen von $(\mathbb{N}, d)$ nach $\mathbb{R}$ an.

**Lösung:** Behauptung: Jede Funktion von $(\mathbb{N}, d)$ nach $\mathbb{R}$ ist stetig.
Beweis:
Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Wir setzten $\delta = \frac{1}{2}$. Dann gilt offensichtlich $d(x, n) \leq \delta$ für $x \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $x = n$. Daher folgt

$$|f(x) - f(n)| = 0 \leq \varepsilon$$

für alle $x \in \mathbb{N}$ mit $d(x, n) \leq \delta$. Also ist $f$ stetig in $n \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe G4.3**

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Ist $f$ stetig?

(b) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, so dass die partiellen Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,0)$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(0,y)$ stetige Funktionen sind, die Funktion $f$ aber in $(0,0)$ unstetig ist.

**Lösung:**

(a) Wir zeigen, dass $f$ in $(0,0)$ nicht stetig ist. Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Da $f(0,0) = (0,0) \neq \frac{1}{2}$ folgt, dass $f$ nicht stetig ist.

(b) Wir definieren

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \text{ oder } y = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $f_1 \equiv 1$ und $f_2 \equiv 1$, also sind $f_1$ und $f_2$ stetig. Außerdem gilt $f(\varepsilon, \varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$. Daher kann $f$ nicht stetig in $(0,0)$ sein.

## Hausübung

**Aufgabe H4.1** (6 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{\sin(x)y^2}{x^2 + y^4}$$

(a) Ist die Funktion $f$ stetig?

(b) Ist sie stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar, d.h. gibt es eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F_{|\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} = f$?

(c) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin(x)y^4}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

**Lösung:**

(a) Die Funktion $f$ ist als Quotient stetiger Funktionen wieder stetig.

(b) Es gilt $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{2\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$. Somit kann die Funktion $f$ nicht stetig auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

(c) Für $y = 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x,y) = 0$. Weiter gilt für $y \neq 0$

$$|f(x,y)| = \left| \frac{\sin(x)y^4}{x^2 + y^4} \right| \leq \left| \frac{\sin(x)y^4}{y^4} \right| \leq |\sin(x)|.$$

Damit folgt, dass $f(x,y) \to 0$, falls $(x,y) \to (0,0)$ und daher ist $f$ stetig in $(0,0)$.
Als Quotient stetiger Funktionen ist $f$ für $(x,y) \neq (0,0)$ ebenfalls stetig.

**Aufgabe H4.2** (6 Punkte)
Es sei

$$C^1([0,1]) := \{f \in C([0,1]) : f \text{ ist differenzierbar in } (0,1) \text{ und } f' \text{ ist stetig fortsetzbar auf } [0,1]\}$$

versehen mit

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{C^1}$ eine Norm ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : C^1([0,1]) \to C([0,1])$, $T(f) = f'$ linear und stetig ist, falls der Raum $C([0,1])$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ normiert wird. Vergleichen Sie hierzu auch G3.3.

**Lösung:**

(a) Dies folgt leicht mit den Normeigenschaften von $\|\cdot\|_\infty$. Es gilt

$$\|f\|_{C^1} = 0 \quad \Rightarrow \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Die Homogenität folgt mit

$$\|\alpha f\|_{C^1} = \|\alpha f\|_\infty + \|\alpha f'\|_\infty = |\alpha|\|f\|_{C^1}$$

und die Dreiecksungleichung analog mit

$$\|f+g\|_{C^1} = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \leq \|f\|\|_{C^1} + \|g\|_{C^1}.$$

(b) Die Linearität von $T$ folgt wegen der Linearität der Ableitung, denn

$$T(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = (\alpha f)' + (\beta g)' = \alpha T(f) + \beta T(g).$$

Die Stetigkeit ergibt sich wie folgt:

$$\|T(f)\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}.$$

Damit ist wegen der Linearität $T$ Lipschitzstetig, denn

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty = \|T(f-g)\|_\infty \leq \|f-g\|_{C^1}.$$

und damit ist $T$ stetig.

**Aufgabe H4.3** (6 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{y} & : \quad y \neq 0 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}.$$

Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktion. Für $c \in \mathbb{R}$ ist die Höhenlinie zur Höhe $c$ gegeben durch

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}.$$

Ist die Funktion stetig im Punkt $(0,0)$? Welchen Hinweis geben die Höhenlinien?
**Hinweis:** Die Höhenlinien sind Kreise.

**Lösung:** Die Höhenlinien der Funktion bestimmen sich durch die Gleichungen $f(x,y) = c$, wo bei $c \in \mathbb{R}$ die Höhe bestimmt. Es gilt

$$\begin{array}{lrcl} & \frac{x^2+y^2}{y} & = & c \\ \Leftrightarrow & x^2+y^2 & = & cy \\ \Leftrightarrow & x^2 - cy + y^2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + y^2 - 2\frac{c}{2}y + (\frac{c}{2})^2 - (\frac{c}{2})^2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + (y - (\frac{c}{2}))^2 & = & (\frac{c}{2})^2. \end{array}$$

Das heißt, die Höhenlinien sind Kreise mit Mittelpunkt $(0, (\frac{c}{2}))$ und Radius $(\frac{c}{2})$. Die Kreise gehen also alle durch den Punkt $(0,0)$. Daher kann die Funktion in diesem Punkt nicht stetig sein. Sie ist unbeschränkt in der Nähe des Ursprungs (genauer: $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^4}) = \infty$)