# Analysis II für M, LaG/M, Ph
# 3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
05.11.2010

## Gruppenübung

### Aufgabe G3.1

(a) Berechnen Sie den Limes der Folgen $x_n = (\frac{5n^2}{n^3+n}, -\frac{1}{n}, 1)$ und $y_n = (2-\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{n}{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, in $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_{\max})$; wobei $\|(a,b)\|_{\max} = \max\{|a|,|b|\}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Gegeben sei ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$. Wir betrachten die Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die so definiert ist

$$d(x,y) = \|x-y\|, \quad x,y \in X.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $d$ eine Metrik auf $X$ ist, und dass $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x,y)$ für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Da $\frac{5n^2}{n^3+n} \to 0$, $-\frac{1}{n} \to 0$ gilt nach dem Lemma auf Seite 5 (Skript: anaII_mehrdim_kap1.pdf)

$$x_n = (\frac{5n^2}{n^3+n}, -\frac{1}{n}, 1) \to (0,0,1).$$

Ebenso

$$y_n = (2-\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{n}{n+1}) \to (2,0,1).$$

(b) Sei $x, y, z \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \|x-y\| = 0 \Longleftrightarrow x-y = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

Weiterhin $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$,

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)\cdot(y-x)\| = |(-1)| \cdot \|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x),$$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y),$$

und

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda \cdot (x-y)\| = |\lambda| \cdot \|x-y\| = |\lambda| \cdot d(x,y).$$

⊣

### Aufgabe G3.2

(a) Gegeben sei ein metrischer Raum $(X, p)$ und $a, b, c, d \in X$. Zeigen Sie, dass

$$|p(a,b) - p(c,d)| \leq p(a,c) + p(b,d).$$

Hinweis. Beweisen Sie durch die Fallunterscheidung: $p(a,b) \leq p(c,d)$ und $p(c,d) < p(a,b)$.

(b) Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Wir betrachten die Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die so definiert ist: $d(x,y) = 0$ falls $x = y$ und $d(x,y) = 1$ falls $x \neq y$. Zeigen Sie, dass diese Funktion $d$ eine Metrik auf $X$ ist und dass jede Menge $A \subseteq X$ offen ist. (Diese Metrik heißt triviale Metrik auf X.)

Lösung:

(a) Falls $p(a,b) \leq p(c,d)$ gilt

$$\begin{aligned} |p(a,b) - p(c,d)| &= p(c,d) - p(a,b) \\ &\leq (p(c,a) + p(a,d)) - p(a,b) \\ &\leq p(c,a) + (p(a,b) + p(b,d)) - p(a,b) \\ &= p(c,a) + p(b,d) \\ &= p(a,c) + p(b,d). \end{aligned}$$

Falls $p(a,b) > p(c,d)$ gilt

$$\begin{aligned} |p(a,b) - p(c,d)| &= p(a,b) - p(c,d) \\ &\leq (p(a,c) + p(c,b)) - p(c,d) \\ &\leq p(a,c) + (p(c,d) + p(d,b)) - p(c,d) \\ &= p(a,c) + p(d,b) \\ &= p(a,c) + p(b,d). \end{aligned}$$

(b) Sei $x, y, z \in X$. Es ist klar, dass $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = d(y,x)$. Also zeigen wir, dass

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Falls $z$ gleich $x$ und $z$ gleich $y$ ist, folgt $x = z = y$. Also $d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y)$. Falls $z$ nicht gleich $x$ oder nicht gleich $y$ ist, folgt, dass mindestens ein Element von $\{d(x,z), d(z,y)\}$ gleich 1 ist. Also $d(x,z) + d(z,y) \geq 1 \geq d(x,y)$.

Nun zeigen wir, dass jede Menge $A \subseteq (X,d)$ offen ist. Beachten Sie, dass

$$U_{\frac{1}{2}}(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \frac{1}{2}\} = \{y \in X \mid d(x,y) = 0\} = \{x\}.$$

Also für alle $x \in A$ nehmen wir $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ und es folgt $U_\varepsilon(x) = \{x\} \subseteq A$.

$\dashv$

Aufgabe G3.3

Wir betrachten den Vektorraum

$$P([0,1]) = \{p : [0,1] \to \mathbb{R} \mid p \text{ ist eine Polynomfunktion}\}$$

und wir definieren $\|p\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |p(x)|$ für alle $p \in C([0,1])$. Betrachten Sie die Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $p_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Gegeben, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $P([0,1])$ ist, zeigen Sie, dass $p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} 0$ und doch $p_n' \overset{\|\cdot\|_\infty}{\not\to} 0$; wobei $p'$ die Ableitung von $p$ ist.

Bemerkung. Diese Aufgabe bedeutet, dass die Funktion

$$T : (P([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (P([0,1]), \|\cdot\|_\infty), \; T(p) = p' = \text{die Ableitung von } p$$

nicht stetig ist.

Lösung:

Es gilt

$$\sup_{x \in [0,1]} |p_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sup_{x \in [0,1]} x^n = \frac{1}{n}.$$

Also $0 \leq \|p_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$; deshalb $p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} 0$. Weiterhin

$$\sup_{x \in [0,1]} p_n'(x) = \sup_{x \in [0,1]} x^{n-1} = 1.$$

Deshalb $p_n' \overset{\|\cdot\|_\infty}{\not\to} 0$. $\dashv$

Hausübung

Aufgabe H3.1 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Limes der Folgen $x_n = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$ und $y_n = (\frac{n}{n^2+1}, (1+\frac{1}{n})^n)$, $n \in \mathbb{N}$, in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\max})$; wobei $\|(a,b)\|_{\max} = \max\{|a|,|b|\}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass, wenn man die Norm $|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$, $a, b \in \mathbb{R}$ statt der Norm $\|\cdot\|_{\max}$ benutzt, die Limites der oben genannten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleich bleiben.

Hinweis. Benutzen Sie T3.3: Gegeben sei ein Vektorraum $V$ und zwei Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ auf $V$, für die es $M_1, M_2 > 0$ gibt, sodass

$$M_1 \cdot \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M_2 \cdot \|x\|_1,$$

für alle $x \in V$. Zeigen Sie, dass für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ und für alle $x \in V$ gilt:

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x \quad \text{genau wenn} \quad x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x.$$

Lösung:

(a) Nach dem Lemma auf Seite 5 (Skript: anaII_mehrdim_kap1.pdf) gilt

$$x_n \to (0,0) \quad \text{und} \quad y_n \to (0,e).$$

(b) Nach dem zweiten Satz auf Seite 5 gibt $a, b > 0$, sodass

$$a \cdot |x| \le \|x\|_{\max} \le b \cdot |x|,$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Da $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} (0,0)$, folgt nach T3.3, dass $x_n \xrightarrow{|\cdot|} (0,0)$ und ebenso $y_n \xrightarrow{|\cdot|} (0,e)$.

⊣

Aufgabe H3.2 (6 Punkte)

(a) Gegeben sei ein metrischer Raum $(X,d)$ und abgeschlossene Mengen $B_i$, $i \in I$. Zeigen Sie, dass die Menge $B = \cap_{i\in I} B_i$ auch abgeschlossen ist.

(b) Gegeben sei ein metrischer Raum $(X,d)$ und abgeschlossene Mengen $B_1, \dots, B_n$. Zeigen Sie, dass die Menge $B = \cup_{k=1}^n B_k$ auch abgeschlossen ist.

Hinweis. Eine Menge $B \subseteq X$ ist abgeschlossen genau wenn die Menge $X \setminus B$ offen ist. Benutzen Sie (b) und (c) von T3.2:

- Gegeben sei ein metrischer Raum $(X,d)$ und offene Mengen $A_i$, $i \in I$. Zeigen Sie, dass die Menge $A = \cup_{i\in I} A_i$ auch offen ist.
- Gegeben sei ein metrischer Raum $(X,d)$ und offene Mengen $A_1, \dots, A_n$. Zeigen Sie, dass die Menge $A = \cap_{k=1}^n A_k$ auch offen ist.

Lösung:

(a) Wir definieren $A_i = X \setminus B_i$, für alle $i \in I$. Es gilt

$$\cap_{i\in I} B_i = \cap_{i\in I}(X \setminus A_i) = X \setminus (\cup_{i\in I} A_i).$$

Da jedes $B_i$ abgeschlossen ist, ist die Menge $A_i$ offen für alle $i \in I$. Nach T3.2 ist die Menge $\cup_{i\in I} A_i$ offen. Also ist die Menge $\cap_{i\in I} B_i$ abgeschlossen.

(b) Wir definieren $A_k = X \setminus B_k$, für alle $k = 1, \dots, n$. Es gilt

$$\cup_{k=1}^n B_k = \cup_{k=1}^n (X \setminus A_k) = X \setminus (\cap_{k=1}^n A_k).$$

Da jedes $B_k$ abgeschlossen ist, ist die Menge $A_k$ offen für alle $k = 1, \dots, n$. Nach T3.2 ist die Menge $\cap_{k=1}^n A_k$ offen. Also ist die Menge $\cup_{k=1}^n B_k$ abgeschlossen.

⊣

Aufgabe H3.3 (6 Punkte)
Wir betrachten den Vektorraum

$$C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$$

und wir definieren

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \text{und} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$$

für alle $f \in C([0,1])$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ Normen auf $C([a,b])$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $M > 0$ gibt, sodass

$$\|f\|_1 \le M \cdot \|f\|_\infty,$$

für alle $f \in C([0,1])$.

(c) Zeigen Sie, dass es kein $K > 0$ gibt, sodass

$$\|f\|_\infty \le K \cdot \|f\|_1,$$

für alle $f \in C([0,1])$.

Hinweis. Bestimmen Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $C([0,1])$, für die $\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x \longrightarrow 0$ gilt, aber $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen die Null-Funktion.

Lösung:

(a) Sei $f, g \in C([0,1])$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es ist klar, dass $\|f\|_\infty \ge 0$. Falls $\|f\|_\infty = 0$, folgt $0 \le |f(x)| \le \|f\|_\infty = 0$, für alle $x \in [0,1]$; also $f = 0$. Da $\|0\|_\infty = 0$, folgt $\|f\|_\infty = 0$ genau wenn $f = 0$. Weiterhin

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \cdot \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

und

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| \le \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)|+|g(x)|) \le \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Also ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $C([0,1])$. Es ist auch klar, dass $\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \ge 0$ und $\int_0^1 |\lambda f(x)|\mathrm{d}x = |\lambda| \cdot \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$. Also gilt $\|f\|_1 \ge 0$ und $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \cdot \|f\|_1$. Falls $\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = 0$, da $|f|$ stetig ist, folgt nach Lemma 31.4, dass $|f(x)| = 0$ für alle $x \in [0,1]$. (Wenn ein $x_0$ gäbe, sodass $|f(x_0)| > 0$, da $|f|$ stetig ist, folgt nach Lemma 31.4, dass $\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x > 0$.) Es ist klar, dass $\int_0^1 0\mathrm{d}x = 0$, also $\|f\|_1 = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.

Da $\int_0^1 g_1 \le \int_0^1 g_2$ für alle sprungstetige Funktionen $g_1$, $g_2$, für die $g_1 \le g_2$ gilt (Satz 31.1 (c) von Analysis I Skript), folgt

$$\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f+g| \le \int_0^1 (|f|+|g|) = \int_0^1 |f| + \int_0^1 |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Deshalb ist $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $C([0,1])$.

(b) Sei $f \in C([0,1])$; nach Definition gilt $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ für alle $x \in [0,1]$. Also

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_0^1 \|f\|_\infty \mathrm{d}x = \|f\|_\infty \cdot (1-0) = \|f\|_\infty.$$

Also für $M = 1 > 0$ gilt $\|f\|_1 \le M \cdot \|f\|_\infty$. (Man kann auch Satz 31.1 (b) benutzen.)

(c) Wenn ein $K > 0$ wäre, sodass $\|f\|_\infty \leq K \cdot \|f\|_1$, für alle $f \in C([0,1])$, würde insbesondere

$$\|f_n - f\|_\infty \leq K \cdot \|f_n - f\|_1$$

für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C([0,1])$ und jede Funktion $f \in C([0,1])$ gelten. Also, wenn $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$, folgt $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.

Nun definieren wir, eine Folge $(f_n)$, für die $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$ gilt und doch $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\not\to} 0$. Dies liefert einen Widerspruch. Die Funktion $f_n$ ist so definiert: $f_n(0) = n$, $f(\frac{1}{n^2}) = 0$, $f$ auf $[0, \frac{1}{n^2}]$ ist linear und $f_n(x) = 0$, wenn $x \in (\frac{1}{n^2}, 1]$. Dann gilt

$$\|f_n\|_\infty \geq f_n(0) = n,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\not\to} 0$. Weiterhin gilt

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n| = \int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n} \to 0.$$

Also $f_n \overset{\|\cdot\|_1}{\to} 0$.

$\dashv$