Analysis II für M, LaG/M, Ph
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
29.10.2010

Gruppenübung

Aufgabe G2.1

(a) Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und in $(0,1)$ differenzierbar. Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$.

Lösung: Wir substituieren $u = g(x)$ und erhalten

$$\int_0^1 f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(0)}^{g(1)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Wir wählen eine Stammfunktion von f, etwa $F(x) := \int_{g(0)}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, und erhalten

$$\int_{g(0)}^{g(1)} f(u)\,\mathrm{d}u = F(g(1)) - F(g(0)).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx \overset{\cos'=-\sin}{=} -[\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln 1 \\ &= \frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

Aufgabe G2.2 (Integrationsregeln)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \cosh^2(x)\,\mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, (d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Lösung:

(a) Partielle Integration mit $u(x) = x$ und $v(x) = \sin(x)$ ergibt

$$\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) - \int \cos(x)\,dx = \sin(x) - x\cos(x) + c.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \cosh^2(x)\,dx &= \int_0^{1/2} \cosh(x)\cosh(x)\,dx \\ &= [\sinh(x)\cosh(x)]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \sinh^2(x)\,dx \\ &= \sinh(1/2)\cosh(1/2) + \int_0^{1/2} 1-\cosh^2(x)\,dx \\ &= 1/2 + \sinh(1/2)\cosh(1/2) - \int_0^{1/2} \cosh^2(x)\,dx,\end{aligned}$$

somit folgt

$$\int_0^{1/2} \cosh^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\sinh(1/2)\cosh(1/2) + \frac{1}{2}\right).$$

(c) Die Substitution $x = \sin(t)$ ergibt

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt.$$

Mit partieller Integration erhält man

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(x)\cos(x)]_{-\pi/2}^{+\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1-\cos^2(t) dt.$$

Daraus folgt

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{2}.$$

(d) Ist $x = 2\arctan t$, dann gilt $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ sowie $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. Mit Hilfe dieser Substitution erhält man dann

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{\frac{(1+t)^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{(1+t)^2}\,dt \\ &= -\frac{2}{1+t} + c = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + c.\end{aligned}$$

Aufgabe G2.3 (Partialbruchzerlegung)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}$.

Bestimmen Sie Koeffizienten A, B, $C \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x) = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2} \quad (*)$ gilt.

Benutzen Sie nun die Darstellung $(*)$, um das Integral $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ zu berechnen.

Lösung: Es soll gelten

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

Multiplikation mit $(x-1)(x-2)^2$ ergibt

$$x = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$$

und man erhält durch Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}0 &= A + B \\ 1 &= -4A - 3B + C \\ 0 &= 4A + 2B - C\end{aligned}$$

mit den Lösungen $A = 1$, $B = -1$ und $C = 2$. Das heißt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{-1}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x-1|\Big|_{-1}^{0} - \ln|x-2|\Big|_{-1}^{0} - 2\frac{1}{x-2}\Big|_{-1}^{0} \\ &= -2\ln 2 + \ln 3 + \tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H2.1 (6 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \ (x \neq 1), \qquad \int \frac{e^{2x}-2}{2e^{-x}+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_1^e \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Lösung: Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$$

daher folgt

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{2}{x-1} - \ln|x-1| + c.$$

Mit der Substitution $t = \ln x$ gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}-2}{2e^{-x}+1}\,dx &= \int \frac{t^2-2}{\frac{2}{t}+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t^2-2}{2+t}\,dt = \int \frac{t^2-4+2}{t+2}\,dt \\ &= \int t-2+\frac{2}{t+2}\,dt = \frac{t^2}{2} - 2t + 2\ln|t+2| + c \\ &= \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 2\ln(e^x+2) + c.\end{aligned}$$

Mit partieller Integration ergibt sich

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x = (\log x)^2|_1^e - \int_1^e \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Daher folgt

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\log x)^2|_1^e = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe H2.2 (6 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

$$(a) \quad \int_0^{\pi/2} \cos(x)/\sqrt{\sin(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad (b) \quad \int_0^\infty x/(x^2+1)^3\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Wir verwenden die *Substitution* $t = \sin(x)$ mit $dt/dx = \cos(x)$ und erhalten

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx = \lim_{a\to 0+} \int\limits_{\sin a}^{\sin \pi/2} 1/\sqrt{t}\,dt = \lim_{a\to 0+} 2\sqrt{t}|_{t=\sin a}^1 = \lim_{a\to 0+} [2-2\sqrt{\sin(a)}] = 2.$$

Hier ist die *Substitution* $t = x^2+1$ mit $dt/dx = 2x$ erfolgreich. Es folgt

$$\int\limits_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b \frac{2x}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b^2+1} 1/t^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}[-\frac{1}{2t^2}]|_{t=1}^{b^2+1} = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe H2.3 (6 Punkte)
Wir definieren die periodische Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $H(x) := x - [x] - \frac{1}{2}$, falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $H(x) = 0$ sonst. Hier bezeichnet $[x]$ für $x \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl, die kleiner als x ist.
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Ist $f : [1, n] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2}\big(f(1) + f(n)\big) + \int_1^n f(x) + H(x) f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\int_k^{k+1} 1 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe partieller Integration. Wählen Sie hierbei die "richtige" Stammfunktion für 1.

Lösung: Wir berechnen zunächst mit partieller Integration:

$$\int_k^{k+1} 1 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\left(x - k - \frac{1}{2}\right) f(x)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für $x \in (k, k+1)$ gilt $\left(x - k - \frac{1}{2}\right) = H(x)$ und daher folgt

$$\int_k^{k+1} 1 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(f(k+1) - f(k)\big) - \int_k^{k+1} H(x) f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Summation über $k = 1, \ldots, n-1$ und anschließendes Addieren von $\frac{1}{2}\big(f(1) + f(n)\big)$ ergibt die Behauptung.