Analysis II für M, LaG/M, Ph
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
22.10.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1.1

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegung $Z_n = \{\frac{k}{2^n} \mid k = 0, 1, \ldots, 2^n\}$ des Intervalls $[0,1]$ und die Funktion $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die so definiert ist: $\varphi_n(0) = 0$ und $\varphi_n(x) = (\dfrac{k}{2^n})^2$; wobei k die einzige natürliche Zahl ist, sodass $x \in (\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, wenn $0 < x \leq 1$;

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx = \frac{1}{6} \cdot (1 + \frac{1}{2^n}) \cdot (2 + \frac{1}{2^n})$$

gilt.
Hinweis. Es gilt $\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

(b) Zeigen Sie dass die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ konvergiert.

(c) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 x^2 dx$ ohne die Benutzung des Theorems 31.8 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung).

Lösung:

(a) Da $\varphi_n(x) = (\dfrac{k}{2^n})^2$ für alle $x \in (\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$, gilt

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} (\frac{k}{2^n})^2 \cdot \mathbf{1}_{(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}(x)$$

für alle $x \setminus Z_n$. Nach Definition 30.3 folgt

$$\begin{aligned}\int_I \varphi_n &= \sum_{k=1}^{2^n} (\frac{k}{2^n})^2 \cdot (\frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n}) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} (\frac{k}{2^n})^2 \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= (\frac{1}{2^n})^3 \cdot \sum_{k=1}^{2^n} k^2.\end{aligned}$$

Nach dem Hinweis folgt

$$\sum_{k=1}^{2^n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot 2^n \cdot (2^n + 1) \cdot (2 \cdot 2^n + 1).$$

Deshalb

$$\begin{aligned}\int_I \varphi_n &= (\frac{1}{2^n})^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2^n \cdot (2^n+1) \cdot (2 \cdot 2^n + 1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1 + \frac{1}{2^n}) \cdot (2 + \frac{1}{2^n}),\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für alle $x, y \in [0,1]$ gilt $|x^2 - y^2| = |x-y| \cdot (x+y) \le 2 \cdot |x-y|$. Falls $x \in (\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, gilt $|x - \frac{k}{2^n}| \le \frac{1}{2^n}$. Also

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |x^2 - (\frac{k}{2^n})^2| \le 2 \cdot |x - \frac{k}{2^n}| \le 2 \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

für alle $x \in (\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$. Es ist klar, dass $|f(0) - \varphi_n(0)| = 0$; also

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

für alle $x \in [0,1]$. Das bedeutet, dass $\|f - \varphi_n\|_\infty \le \frac{1}{2^{n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Deshalb konvergiert die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f.

(c) Da die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gilt nach der Definition des Integrals (Definition 30.16) und nach (a), dass

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \cdot (1 + \frac{1}{2^n}) \cdot (2 + \frac{2}{2^n}) = \frac{1}{6} \cdot (1+0) \cdot (2+0) = \frac{1}{3}.$$

⊣

Aufgabe G1.2 (Korollar 30.14.)

(a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf I gibt mit $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ und $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_\infty < \infty$. Zeigen Sie, dass f sprungstetig ist.

(b) Sei $f : I \to \mathbb{K}$ eine sprungstetige Funktion. Zeigen Sie, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Treppenfunktion $\varphi_k : I \to \mathbb{K}$ gibt mit

$$|f(x) - \varphi_k(x)| \le \frac{1}{2^k}, \quad \text{für alle } x \in I.$$

(c) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine sprungstetige Funktion. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf I gibt mit $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ und $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_\infty < \infty$.
Hinweis. Nehmen Sie $f_1 = \varphi_1$ und jedes f_{k+1} als die Differenz zweier Funktionen der Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von (b).

Lösung:

(a) Wir definieren $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da jedes f_n eine Treppenfunktion ist, folgt nach T1.2, dass die Funktion s_n auch eine Treppenfunktion ist. Die Voraussetzung $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ (gleichmäßig) bedeutet, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Nach Theorem 30.13 folgt, dass f sprungstetig ist.

(b) Da f eine sprungstetige Funktion ist, folgt nach Theorem 30.13, dass es eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt, die gleichmäßig gegen g konvergiert. Also gibt für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein n_k, sodass $\|f - f_{n_k}\|_\infty < \frac{1}{2^k}$. Daher $|f(x) - f_{n_k}(x)| \le \frac{1}{2^k}$, für alle $x \in I$. Also definieren wir $\varphi_k = f_{n_k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

(c) Sei eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie (b). Wir definieren $f_1 = \varphi_1$ und $f_{k+1} = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann ist jedes f_k eine Treppenfunktion und

$$\begin{aligned}|f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)| &= |f(x) - (\varphi_1(x) + (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) + \cdots + (\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)))| \\ &= |f(x) - \varphi_n(x)| \le \|f - \varphi_n\|_\infty \le \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Das heißt, dass $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Weiterhin

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \\ &\leq |\varphi_n(x) - f(x)| + |f(x) - \varphi_{n-1}(x)| \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^n} \end{aligned}$$

für alle $x \in I$ und alle $n \geq 2$. Also $\|f_n\|_\infty \leq \frac{3}{2^{n-1}}$ für alle $n \geq 2$. Deshalb

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty \leq \|\varphi_1\|_\infty + 3 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq \|\varphi_1\| + 3 \cdot \frac{1}{2} < \infty.$$

⊣

Aufgabe G1.3

(a) Sei $g : \mathbb{R} \to [a, b]$ eine differenzierbare Funktion und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) \mathrm{d}t$$

differenzierbar ist und $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $F(x) = \int_4^{x^2} \frac{1}{\log(t)} \mathrm{d}t$, $x \in [2, 3]$.

Lösung:

(a) Wir betragen die Funktion $H(y) = \int_a^y f(t)\mathrm{d}t$, $y \in [a, b]$. Es ist klar, dass $F(x) = H(g(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da f stetig ist, folgt nach Theorem 31.8 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung), dass H differenzierbar ist und $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y}(y_0) = f(y_0)$ für alle $y_0 \in [a, b]$. Da $F(x) = H(g(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt dass F differenzierbar ist und

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y}(g(x_0)) \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_0) = f(g(x_0)) \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_0),$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. Das heißt $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Wir nehmen die Funktionen $g(x) = x^2$, $x \in [2, 3]$ und $f(t) = \frac{1}{\log(t)}$, $t \in [4, 9]$. Es ist klar, dass $F(x) = \int_4^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t$, für alle $x \in [2, 3]$. Nach (a) folgt $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$, für alle $x \in [2, 3]$. Also $F'(x) = \frac{2x}{\log(x^2)}$ für alle $x \in [2, 3]$.

⊣

Hausübung

Aufgabe H1.1 (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}| \leq |x-y|$, für alle $x, y \geq 0$.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegung $P_n = \{\frac{k}{2^n} \mid k = 0, 1, \ldots, 2^n\}$ des Intervalls $[0,1]$ und die Funktion $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die so definiert ist: $\varphi_n(0) = 1$ und $\varphi_n(x) = \frac{1}{(\frac{k}{2^n})+1}$; wobei k die einzige natürliche Zahl ist, sodass $x \in (\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, wenn $0 < x \leq 1$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \log(2).$$

Hinweis. Nehmen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \geq 0$. Was ist der Wert des Integrals $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$?

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} |\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}| &= |\frac{y+1-(x+1)}{(x+1)(y+1)}| \\ &= \frac{|y-x|}{(x+1)(y+1)} \\ &\leq |y-x|. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $(x+1), (y+1) \geq 1$ für alle $x, y \geq 0$ gilt.

(b) Wir nehmen die Funktion $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \geq 0$. Es ist klar, dass

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \log(x+1)|_0^1 = \log(2) - \log(1) = \log(2).$$

Wir zeigen, dass die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Für $x \in (\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$ gilt nach (a), dass

$$\begin{aligned} |f(x) - \varphi_n(x)| &= |\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(\frac{k}{2^n})+1}| \\ &\leq |x - \frac{k}{2^n}| = \frac{k}{2^n} - x \\ &\leq \frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Da $|f(0) - \varphi_n(0)| = 0$, gilt $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $\|f - \varphi_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$. Also, konvergiert die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f.

Da jedes φ_n Treppenfunktion ist und die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, folgt nach Definition 30.16, dass $\int_0^1 \varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \log(2)$.

$\dashv$

Aufgabe H1.2 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $F(x) = \int_{-x^2}^{x^3} e^{t^2}\mathrm{d}t$, $x \in [0,1]$.

(b) Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leq 100$. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [0,2]$ gibt, sodass $f(\xi) \leq 50$.
Hinweis. Benutzen Sie die Bemerkung 31.6.

Lösung:

(a) Erste Lösung: Sei $F_1(x) = \int_{-1}^{x^3} e^{t^2} \mathrm{d}t$ und $F_2(x) = \int_{-1}^{-x^2} e^{t^2} \mathrm{d}t$, $x \in [0,1]$. Nach der Linearität des Integrals, folgt $F_1 = F_2 + F$, also $F = F_1 - F_2$. Da die Funktion $t \mapsto e^{t^2}$, $t \in [0,1]$ stetig ist und die Funktionen $x \mapsto -x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \in [0,1]$ Differenzierbar sind, gilt nach G1.3, dass die Funktionen F_1, F_2 differenzierbar sind und $F_1'(x) = 3x^2 e^{x^6}$, $F_2'(x) = -2xe^{x^4}$ für alle $x \in [0,1]$. Also $F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 3x^2 e^{x^6} + 2xe^{x^4}$, für alle $x \in [0,1]$.

Zweite Lösung: Sei $H_1(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2} \mathrm{d}t$ und $H_2(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} \mathrm{d}t$, $x \in [0,1]$. Nach G1.3 folgt $H_1'(x) = 3x^2 e^{x^6}$ und $H_2'(x) = 2xe^{x^4}$. Da die Funktion $f(t) = e^{t^2}$ gerade ist, (das heißt $f(t) = f(-t)$ für alle t), gilt $\int_0^b e^{t^2} \mathrm{d}t = \int_{-b}^0 e^{t^2} \mathrm{d}t$ für alle $b > 0$. Also $H_2(t) = \int_{-x^2}^0 e^{t^2} \mathrm{d}t$ und weiterhin $F = H_1 + H_2$. Also $F'(x) = H_1'(x) + H_2'(x) = 3x^2 e^{x^6} + 2xe^{x^4}$.

(b) Nach Bemerkung 31.6, gibt ein $\xi \in [0,2]$, sodass

$$\int_0^2 f(x) \mathrm{d}x = f(\xi) \cdot (2-0) = 2f(\xi).$$

Da $\int_0^2 f(x) \mathrm{d}x \leq 100$, folgt $2f(\xi) \leq 100$. Also $f(\xi) \leq 50$.

$\dashv$

Aufgabe H1.3 (6 Punkte)

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen auf einem abgeschlossen Intervall I, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Zeigen Sie, dass

$$\int_I f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n.$$

(b) Wir definieren $x_1 = 0$, $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2}$ für jedes $n \geq 2$. (Es gilt, dass $x_n \to \frac{\pi^2}{6}$.) Wir betrachten die Funktion $f : [0, \frac{\pi^2}{6}] \to \mathbb{R}$, die auf jedem Intervall $(x_n, x_{n+1}]$ gleich $1/n$ ist und $f(0) = f(\frac{\pi^2}{6}) = 0$. Wir betrachten auch die Funktionen $f_n : [0, \frac{\pi^2}{6}] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, die so definiert sind: $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ wenn $x \in (x_n, x_{n+1}]$, $f_n(x) = f(\frac{\pi^2}{6}) = 0$ wenn $x \notin (x_n, x_{n+1}]$.

i. Zeigen Sie, dass es $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ für jedes $x \in [0, \frac{\pi^2}{6}]$ gilt.

   Hinweis. Beweisen Sie es durch die Fallunterscheidung: $x \in \{0, \frac{\pi^2}{6}\}$ und $x \in (x_n, x_{n+1}]$ für ein $n \geq 1$.

ii. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

   Hinweis. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ beweisen Sie, dass für alle $x \in (0, x_{N+1}]$ $f(x) = \sum_{k=1}^{N} f_k(x)$. Wie groß ist die Zahl $|f(x) - \sum_{k=1}^{N} f(x)|$ wenn $x \notin (0, x_{N+1}]$?

iii. Finden Sie eine Folge $(a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen, sodass $\int_0^{\frac{\pi^2}{6}} f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Lösung:

(a) Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$, gilt nach Satz 21.10(Majorantenkriterium für Funktionenreihen), dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergiert. Das heißt, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Nach Definition 30.16, folgt $\int_I s_n \xrightarrow{n\to\infty} \int_I f$. Also

$$\begin{aligned}
\int_I f &= \lim_{n\to\infty} \int_I s_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_I \sum_{k=1}^{n} f_k \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_I f_k \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n.
\end{aligned}$$

(b) i. Falls $x \in \{0, \frac{\pi^2}{6}\}$, gilt $f_k(x) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = 0 = f(x)$. Falls $x \in (x_n, x_{n+1}]$, gilt $f(x) = \dfrac{1}{n}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ und für jedes $k \neq n$ $f_k(x) = 0$, weil $x \notin (x_k, x_{k+1}]$. Also $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \frac{1}{n} = f(x)$.

ii. Sei ein $N \in \mathbb{N}$. Falls $x \in (0, x_{N+1}]$, gibt es ein einziges $n < N$ sodass $x \in (x_n, x_{n+1}]$. Also

$$\sum_{k=1}^{N} f_k(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots + f_N(x) = 0 + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots + 0 = \frac{1}{n}.$$

Weiterhin $f(x) = \dfrac{1}{n}$, weil $x \in (x_n, x_{n+1}]$. Also $f(x) = \sum_{k=1}^{N} f_k(x)$ für alle $x \in (0, x_{N+1}]$. Falls $x \in (x_{N+1}, \frac{\pi^2}{6})$, gibt es ein einziges $n \geq N$, sodass $x \in (x_n, x_{n+1}]$. Also $f(x) = \dfrac{1}{n}$ und $\sum_{k=1}^{N} f_k(x) = 0$, weil für alle $k \in \{1, \ldots, N\}$, $x \notin (x_k, x_{k+1}]$. Deshalb $\displaystyle|f(x) - \sum_{k=1}^{N} f_k(x)| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$. Wenn $x \in \{0, \frac{\pi^2}{6}\}$, ist es klar, dass $f(x) = \sum_{k=1}^{N} f_k(x) = 0$. Also

$$|f(x) - \sum_{k=1}^{N} f_k(x)| \leq \frac{1}{N}$$

für alle $x \in [0, \frac{\pi^2}{6}]$. Das heißt $\displaystyle\|f - \sum_{k=1}^{N} f_k\|_\infty \leq \frac{1}{N}$, also konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig gegen f.

iii. Nach (i) und (ii) folgt $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{6}} f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi^2}{6}} f_k$. Also, nehmen wir $\displaystyle a_k = \int_0^{\frac{\pi^2}{6}} f_k = \frac{1}{k} \cdot (x_{k+1} - x_k)$. Es ist klar, dass $\displaystyle x_{k+1} - x_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{k^2}$. Also $\displaystyle a_k = \frac{1}{k^3}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

$\dashv$