# Analysis II für M, LaG/M, Ph
# 14. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
11.02.2011

## Aufgaben

**Aufgabe T14.1**
Sei $(\gamma, K)$ ein grüner Bereich in der Ebene, eine geöffnete Menge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $K \subseteq G$, ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : F = (F_1, F_2, F_3)$ und eine $C^2(G)$ Funktion $f$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\phi\circ\gamma} F \mathrm{d}\vec{x} = \int_K \mathrm{rot}F(x,y,f(x,y)) \cdot (-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

wobei $\phi(x,y) = (x,y,f(x,y))$.

Lösung:

Nach dem Satz von Stokes folgt, dass

$$\int_{\phi\circ\gamma} F \mathrm{d}\vec{x} = \int_K \mathrm{rot}F(\phi(x,y)) \cdot N_\phi(x,y).$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} N_\phi((x,y)) &= (\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x})\Big|_{(x,y)} \times (\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y})\Big|_{(x,y)} \\ &= (1, 0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}) \times (0, 1, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}) \\ &= (-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, -\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, 1). \end{aligned}$$

Deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\phi\circ\gamma} F \mathrm{d}\vec{x} &= \int_K \mathrm{rot}F(\phi(x,y)) \cdot N_\phi(x,y) \\ &= \int_K \mathrm{rot}F(x,y,f(x,y)) \cdot (-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

$\dashv$

**Aufgabe T14.2**
Seien $C$ der Schnitt des Zylinders $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Ebene $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$ und $\Gamma$ ein Weg mit $\mathrm{Spur}(\Gamma) = C$. Bestimmen Sie das Integral $\int_\Gamma F \mathrm{d}\vec{x}$, wobei $F(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$.
Hinweis. Betrachten Sie die Menge $A = \{(x,y,f(x,y)) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, wobei $f(x,y) = 1 - x - y$, $x, y \in \mathbb{R}$ und benutzen Sie T14.1. Welche ist die Beziehung zwischen $\Gamma$ und $A$?

Lösung:

Die Kurve $\Gamma$ bestimmt genau der Rand von $A$. Nun bestimmen wir ein grüner Bereich $(\gamma, K)$ in der Ebene und eine $C^2$-Funktion $\phi$, sodass $A = \{\phi(u) \mid u \in K\}$.
Sei $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, $\gamma : [0,2\pi] \to K : \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = 1-x-y$ und $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \phi(x,y) = (x,y,f(x,y)) = (x,y,1-x-y)$. Es ist klar, dass $A = \{\phi(x,y) \mid (x,y) \in K\}$ und $\Gamma = \phi(\gamma)$.
Nach T14.1 folgt

$$\int_\Gamma F \mathrm{d}\vec{x} \quad = \quad \int_K \mathrm{rot} F(x,y,f(x,y)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Wir berechnen $\mathrm{rot} F(x,y,z) = (0,0,3x^2+3y^2)$. Daher

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F \mathrm{d}\vec{x} &= \int_K (0,0,3x^2+3y^2) \times (1,1,1) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_K 3x^2+3y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Also müssen wir das Integral $I := \displaystyle\int_K 3x^2+3y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ bestimmen. Wir benutzen die Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \qquad r \in [0,1], \quad \theta \in [0,2\pi].$$

Es folgt

$$\begin{aligned} I &= 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \cdot r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \\ &= 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \\ &= 6\pi \int_0^1 r^3 \mathrm{d}r \\ &= 6\pi \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

⊣

Aufgabe T14.3
Bestimmen Sie das Integral $I = \int_\Gamma F \mathrm{d}\vec{x}$ aus T14.2 ohne den Satz von Stokes zu verwenden.

Lösung:

Wir betrachten die folgende Parametrisierung von $C = \mathrm{Spur}(\Gamma)$:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1 - \sin t - \cos t, \qquad t \in [0,2\pi].$$

Deshalb

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F \mathrm{d}\vec{x} &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 1-\sin t - \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, -\cos t + \sin t) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} ((-\sin^3 t), \cos^3 t, (1-\sin t - \cos t)^3) \cdot (-\sin t, \cos t, -\cos t + \sin t) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^4 t + \cos^4 t \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} (1 - \sin t - \cos t)^3 \cdot (-\cos t + \sin t) \mathrm{d}t =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Das zweite Integral $I_2$ wird $\int_a^b u^3 \mathrm{d}u$, wobei $u = (1 - \sin t - \cos t)$ und -deshalb- $a = 0$ (wenn $t = 0$), $b = 0$ (wenn $t = 2\pi$). Daher $I_2 = \int_0^0 u^3 \mathrm{d}u = 0$. Nun bestimmen wir das erste Integral $I_1$. Es gilt

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}.$$

Also

$$\sin^4 t + \cos^4 t = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos^2 2t) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1 + \cos 4t}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1 + \cos 4t}{4}.$$

Deshalb

$$I = I_1 + 0 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1 + \cos 4t}{4} \mathrm{d}t = \pi + \frac{1}{4} \cdot \int_0^{2\pi} (1 + \cos 4t) \mathrm{d}t = \pi + \frac{1}{4} \cdot (t + \frac{\sin 4t}{4})\Big|_0^{2\pi} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

$\dashv$