Analysis II für M, LaG/M, Ph
13. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
4.2.2011

Aufgaben

Aufgabe T13.1
Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Viertelkreises mit dem Radius $r > 0$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes in der Ebene.

Lösung: Eine Parametrisierung des Randes ist gegeben durch

$$\begin{aligned} X_1(t) &= (t,0)^T, \quad t \in [0,r] \\ X_2(t) &= (-t,(r^2-t^2)^{\frac{1}{2}})^T, \quad t \in [-r,0] \\ X_3(t) &= (0,(1-t)r)^T, \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Es gilt

$$X_1'(t) = (1,0)^T, \quad X_2'(t) = (1,-t(r^2-t^2)^{-\frac{1}{2}})^T, \quad X_3'(t) = (0,-r)^T.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} 2|B_R| &= \int_0^r (0,t)(1,0)^T \,\mathrm{d}t + \int_{-r}^0 (-(r^2-t^2)^{\frac{1}{2}},t)(-1,-t(r^2-t^2)^{-\frac{1}{2}})^T \,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^1 ((t-1)r,0)(0,-r)^T \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^r (r^2-t^2)^{\frac{1}{2}} - t^2(r^2-t^2)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}t = \int_0^r r^2(r^2-t^2)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}t \\ &= r^2 \int_0^r r^{-1}(1-(t/r)^2)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}t \overset{s=t/r}{=} r^2 \int_0^1 (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}s = r^2 \arcsin(s)\Big|_0^1 = r^2\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe T13.2
Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$ ein grüner Bereich. Ferner erfülle $u \in C^2(M \times \mathbb{R})$ die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} \Delta_x u - u_{tt} &= 0 \quad \text{in} \quad M \times \mathbb{R}, \\ u_t &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial M \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie: Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$E(t) := \int_M \left(u_t(x,t)^2 + \|\nabla_x u(x,t)\|^2 \right) \,\mathrm{d}x$$

konstant. (Hierbei beziehen sich $\Delta_x := \partial_1^2 + \partial_2^2$ und ∇_x auf die Ortsvariable $x \in M$).

Anleitung:

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes, dass für $f, g \in C^2(M)$ gilt:

$$\int_M \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, \mathrm{d}x = \int_{\partial M} f \langle \vec{n}, \nabla g \rangle \, \mathrm{d}S - \int_M f \Delta g \, \mathrm{d}x$$

(Hierbei ist $\vec{n}$ die äußere Normale an M).

b) Zeigen Sie, dass $\frac{dE}{dt} = 0$ gilt.

Lösung: Zunächst beobachten wir, dass $\Delta h = \operatorname{div} \nabla h$ gilt. Dann benötigen wir noch die Identität $\operatorname{div}(h \nabla g) = \nabla h \cdot \nabla g + h \operatorname{div} \nabla g = \nabla h \cdot \nabla g + h \Delta g$, die aus der Produktregel folgt. Daher liefert der Satz von Gauß

$$\int_G \nabla h \cdot \nabla g + h \Delta g \, \mathrm{d}x = \int_G \operatorname{div}(h \nabla g) = \int_{\partial G} h \nabla g \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}s.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}(t) &= \int_M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(u_t(x,t)^2 + \nabla u(x,t) \nabla u(x,t) \right) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_M 2u_t(x,t) u_t t(x,t) + 2 \nabla u_t(x,t) \nabla u(x,t) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_M 2u_t(x,t) \Delta_x u(x,t) + 2 \nabla u_t(x,t) \nabla u(x,t) \, \mathrm{d}x \\ &= 2 \int_{\partial M} u_t(x,t) \nabla u(x,t) \cdot \vec{n}(x) \, \mathrm{d}s \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe T13.3

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gebiets G aus G13.3 mit Hilfe des Greenschen Satzes.

Lösung: Es gilt

$$|G| = \frac{1}{2} \int_{\partial G} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x$$

und mit den Parametrisierungen $\varphi_1(t) = (t, t^2)$, $-2 \leq t \leq 2$ von G_1 und $\varphi_2(t) = (t, 4)$, $-2 \leq t \leq 2$ von $-G_2$ gilt

$$2|G| = \int_{\partial G} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x = \int_{G_1} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x - \int_{-G_2} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \left((2t^2 - t^2) + 4 \right) \, \mathrm{d}t = \frac{64}{3}.$$

Damit ist $|G| = \frac{32}{3}$.