Analysis II für M, LaG/M, Ph
12. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
28.1.2011

Aufgaben

Aufgabe T12.1
Gegeben sei der Kreisringsektor

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ und } 9 \leq x^2 + y^2 \leq 81\}.$$

Es sei σ die Polarkoordinatenabbildung. Geben Sie eine Menge B an, so dass $\sigma(B) = K$ gilt. Berechnen Sie den Flächeninhalt von K und den Schwerpunkt (x_S, y_S), der durch

$$x_S := \frac{1}{\mu(K)} \int_K x \, \mathrm{d}(x, y)$$
$$y_S := \frac{1}{\mu(K)} \int_K y \, \mathrm{d}(x, y)$$

definiert ist.

Lösung: Es gilt $B = \{(r, \varphi) : 3 \leq r \leq 9 \text{ und } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$. Der Flächeninhalt ist

$$\mu(K) = \int_K \mathrm{d}(x, y) = \int_0^{\pi/2} \int_3^9 \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = 18\pi.$$

Für den Schwerpunkt berechnet man

$$x_S = \frac{1}{\mu(K)} \int_K x \, \mathrm{d}(x, y) = \frac{1}{\mu(K)} \int_0^{\pi/2} \int_3^9 r^2 \cos\varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \frac{13}{\pi}$$

und

$$y_S = \frac{1}{\mu(K)} \int_K y \, \mathrm{d}(x, y) = \frac{1}{\mu(K)} \int_0^{\pi/2} \int_3^9 r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \frac{13}{\pi}.$$

Aufgabe T12.2 (**Cantor Mengen**)
Es sei $\alpha \in]0, 1]$. Wir definieren nun rekursiv eine Folge von Mengen $C_n^\alpha \subset [0, 1]$ welche jeweils aus der Vereinigung von 2^n abgeschlossenen disjunkten Intervallen besteht. Es sei $C_0^\alpha = [0, 1]$. C_{n+1}^α entsteht aus C_n^α, indem man zu jedem Teilintervall $[a, b]$ aus C_n^α das offene Intervall $]\frac{a+b}{2} - \frac{\alpha}{2 \cdot 3^{n+1}}, \frac{a+b}{2} + \frac{\alpha}{2 \cdot 3^{n+1}}[$ der Länge $\frac{\alpha}{3^{n+1}}$ herausnimmt. Z.B ist also

$$C_1 = C_0 \setminus \left]\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2 \cdot 3}, \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2 \cdot 3}\right[= \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2 \cdot 3}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2 \cdot 3}, 1\right]$$

Die Menge $C^\alpha := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n^\alpha$ wird modifizierte Cantormenge genannt.

(a) Zeigen sie, dass C^α abgeschlossen und $[0,1] \setminus C^\alpha$ dicht in $[0,1]$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass C^α nur für $\alpha = 1$ Jordan messbar ist und bestimmen Sie in diesem Fall das Jordan Maß von C^1.

(c) Für die folgenden Teilaufgaben sei nun $\alpha = 1$. In diesem Fall nennt man die Menge $C := C^1$ Cantormenge. Zeigen Sie, dass sich jedes Element aus C für genau eine Folge $(a_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ in der Form $\sum_{n=1}^\infty \frac{2a_n}{3^n}$ schreiben läßt.
Hinweis: Benutzen Sie, dass sich jedes $x \in [0,1]$ triadisch darstellen läßt. D.h. jedes $x \in [0,1]$ läßt sich durch eine Reihe $x = \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{3^n}$ mit $b_n \in \{0,1,2\}$ darstellen.

(d) Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi : C \to [0,1]$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{2a_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{2^n}$ surjektiv, monoton steigend aber nicht injektiv ist.

Hinweise: (i) Jeder Punkt in $[0,1]$ hat eine binäre Darstellung. (ii) Sei $a, b \in C$ mit $a < b$ in der Darstellung aus (c). Betrachten Sie den kleinsten Koefiizienten $a_k, b_k \in \{0,1\}$, so dass $b_k \neq a_k$ ist. (iii) Berechne $\phi(\frac{1}{3})$ und $\phi(\frac{2}{3})$.

(e) Zu $x \in [0,1] \setminus C$ sei $\alpha(x) = \inf\{y \in C \,|\, (y,x) \subset [0,1] \setminus C\}$. Zeigen Sie, dass die sogenannte Cantorfunktion $\psi : [0,1] \to [0,1]$,

$$x \mapsto \begin{cases} \phi(x) & \text{falls } x \in C \\ \phi(\alpha(x)) & \text{falls } x \in [0,1] \setminus C \end{cases}$$

stetig und monoton steigend ist. (Sie ist sogar in allen Punkten $x \notin C$ differenzierbar und es gilt $\psi'(x) = 0$.)
Hinweis: Aus der Monotonie und der Surjektivität folgt schon die Stetigkeit.

Lösung:

(a) C^α ist abzählbarer Schnitt abgeschlossener Mengen und damit abgeschlossen. $[0,1] \setminus C^\alpha$ ist dicht, denn zu jedem Punkt $x \in C^\alpha$ liegt ein Punkt $y \in [0,1] \setminus C^\alpha$ beliebig nahe an x. Dies kann man sich folgendermassen klar machen. Zu $\varepsilon > 0$ genügend klein sei $y := x + \varepsilon \in [0,1]$ (falls $x = 1$ setze $y := x - \varepsilon$). Ist $y \in [0,1] \setminus C^\alpha$ ist nichts mehr zu zeigen. Ist $y \in C^\alpha$ dann wird in einem genügend späten Iterationsschritt ein Intervall zwischen x und y entfernt, welches Elemente aus $[0,1] \setminus C^\alpha$ enthält. Insbesondere enthält C^α kein Intervall positiver Länge.

(b) In jedem Iterationsschritt werden von C_n^α 2^n disjunkte Intervalle der Länge $\frac{\alpha}{3^{n+1}}$ entfernt. Als Zerlegungen Z_n nehmen wir alle herausgenommenen Intervalle und die verbleibenden Teilintervalle von C_n^α. Daher gilt $O(Z_{n+1}, C^\alpha) = O(Z_n, C^\alpha) - 2^n \frac{\alpha}{3^{n+1}}$. Rekursiv errechnet sich $O(Z_n, C^\alpha) = 1 - \alpha(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n})$. Es ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} O(Z_n, C^\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^\infty (\frac{2}{3})^j = 1 - \alpha$$

Aus Teil (a) folgt, dass $U(Z_n, C^\alpha) = 0$ für jedes α gilt. Daher ist C^α genau für den Fall $\alpha = 1$ messbar und C^1 ist eine Nullmenge.

(c) Jeder Punkt in $[0,1]$ lässt sich triadisch darstellen. Es ist $\frac{b_1}{3}$ ein Element von $C_1 := C_1^1$ genau dann wenn $b_k \in \{0,2\}$. Induktiv ergibt sich $\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{3^k} \in C_n := C_n^1$ genau dann wenn $b_k \in \{0,2\}$ für alle $k = 1 \ldots n$. Also gilt auch $\sum_{n=1}^\infty \frac{2a_n}{3^n} \in C$ genau dann wenn $(a_n)_n = a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Verschiedener solcher Reihen ergeben verschiedene Elemente aus C, denn wenn sich zu zwei Folgen $a, b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Einträge a_k, b_k zu einem $k \in \mathbb{N}$ unterscheiden, dann liegt $\sum_{n=1}^\infty \frac{2a_n}{3^n}$ in einem anderen Teilintervall von C_k wie $\sum_{n=1}^\infty \frac{2b_n}{3^n}$ Bemerkung: Inbesondere folgt damit, dass C überabzählbar ist, da $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ überabzählbar ist.

(d) **Surjektivität**: Zu jedem Element $x \in [0,1]$ gibt es eine binäre Darstellung $x = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{2^n}$, $a_n \in \{0,1\}$. Folglich ist ϕ surjektiv.
Injektivität: ϕ ist nicht injektiv, denn zum Beispiel $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ liegen in C aber es gilt

$$\phi(\frac{1}{3}) = \phi(0 \cdot \frac{2}{3} + \sum_{n=2}^\infty \frac{2}{3^n}) = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} = \phi(\frac{2}{3} + \sum_{n=2}^\infty \frac{0}{3^n}) = \phi(\frac{2}{3}).$$

Monotonie: Seien nun $a, b \in C$ mit $a = \sum_{n=2}^\infty \frac{2a_n}{3^n} < b = \sum_{n=2}^\infty \frac{2b_n}{3^n} \in C$ mit a, b (mit $a_n, b_n \in \{0,1\}$). Sei k die kleinste natürliche Zahl, für die $a_k \neq b_k$ gilt. Es ist

$$0 < b - a = 2\frac{(b_k - a_k)}{3^k} + 2\sum_{n=k+1}^\infty \frac{b_n - a_n}{3^n} < 2\frac{(b_k - a_k)}{3^k} + \frac{1}{3^k}.$$

Also muss $a_k = 0$ und $b_k = 1$ gelten. Daher folgt

$$\phi(a) = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{2^n} + \sum_{n=k+1}^\infty \frac{a_n}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{2^n} + \sum_{n=k+1}^\infty \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{b_n}{2^n} + \frac{1}{2^k} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{2^n} = \phi(b).$$

Also ist ϕ monoton steigend.

(e) ψ ist auf C monoton steigend und in allen anderen Bereichen lokal konstant. Aus (c) folgt daher das ψ monoton stiegend und surjektiv ist. Daraus folgt aber schon die Stetigkeit, denn zu jedem offene Intervall U im Bild $[0,1]$ ist auch $f^{-1}(U)$ ein offenes Intervall .