Analysis II für M, LaG/M, Ph
11. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
21.01.2011

Aufgaben

Aufgabe T11.1
Wir betrachten die Funktion $f : I = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} :, f(x,y) = xy$.

(a) Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung Z_n von I in n^2 Teilintervalle an.

(b) Geben Sie zur Zerlegung Z_n zwei Treppenfunktionen $\underline{f}_n$, $\overline{f}_n$ mit $\underline{f}_n \leq f \leq \overline{f}_n$ an.

(c) Benutzen Sie die Treppenfunktionen aus (b) um zu zeigen, dass f auf I Riemannintegrierbar ist.

Lösung:

(a) Wir definieren

$$I_{ij} = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$$

für alle $i, j = 0, \ldots, n-1$ und $Z_n = \{I_{ij} \mid i, j = 0, \ldots, n-1\}$. Es ist klar, dass Z_n n^2 Teilintervalle hat.

(b) Sei $0 \leq x < 1$ und $0 \leq y < 1$. Wir definieren

$$\underline{f}_n(x,y) = \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \quad \text{und} \quad \overline{f}_n(x,y) = \frac{i+1}{n} \cdot \frac{j+1}{n}$$

wobei i, j die einzige Zahlen, für die $x \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ und $y \in [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})$ gilt. Wenn $x = 1$, nehmen wir $\frac{n-1}{n}$ statt $\frac{i}{n}$ und $\frac{1}{n}$ statt $\frac{i+1}{n}$. Ebenso für $y = 1$. Es ist klar, dass $\underline{f}_n \leq f \leq \overline{f}_n$.

(c) Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \int_I (\overline{f}_n - \underline{f}_n) \mathrm{d}(x,y) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_I \overline{f}_n \mathrm{d}x &= \sum_{i,j=0,\ldots,n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{j+1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \\ \int_I \underline{f}_n \mathrm{d}x &= \sum_{i,j=0,\ldots,n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

$(\frac{1}{n^2} = \mu(I_{ij}))$. Falls $0 \le i, j < n-1$ ist die Komponente $\frac{i+1}{n} \cdot \frac{j+1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}$ der ersten Summe auch eine Komponente der zweiten Summe und falls $0 < i, j \le n-1$ ist die Komponente $\frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2}$ der zweiten Summe auch eine Komponente der ersten Summe. Also

$$\begin{aligned}
\int_I (\overline{f}_n - \underline{f}_n)\mathrm{d}x &= \sum_{j=0,\dots,n-1} 1 \cdot \frac{j+1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{(falls } i = n-1 \text{ in der ersten Summe)} \\
&+ \sum_{i=0,\dots,n-1} \frac{i+1}{n} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{(falls } j = n-1 \text{ in der ersten Summe)} \\
&- \sum_{j=0,\dots,n-1} \frac{0}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{(falls } i = 0 \text{ in der zweiten Summe)} \\
&- \sum_{i=0,\dots,n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{0}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{(falls } j = 0 \text{ in der zweiten Summe)} \\
&= 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n^3} \\
&= \frac{2}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \frac{2}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Deshalb $\lim_{n\to\infty} \int_I (\overline{f}_n - \underline{f}_n)\mathrm{d}(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0.$

$\dashv$

Aufgabe T11.2

Seien ein abgeschlossen Intervall I von $\mathbb{R}^n$ und Z eine Menge von abgeschlossenen Intervallen. Die Menge Z heißt Rechteckzerlegung des I genau wenn:

(a) für alle $J \in Z$ gilt $\emptyset \neq J \subseteq I$;

(b) $I = \cup_{J\in Z} J$;

(c) für alle $J_1, J_2 \in Z$ und für alle $x \in J_1 \cap J_2$ (wenn solche x gibt) ist x nicht innere Punkt von $J_1 \cap J_2$.

Die Menge Z heißt Gitter-Zerlegung des $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ genau wenn für alle $i = 1, \dots, n$ eine Zerlegung Z_i des $[a_i, b_i]$ gibt, sodass

$$Z = \{[c_1, d_1] \times \cdots \times [c_n, d_n] \mid \text{jedes } [c_i, d_i] \text{ ist ein Interval von } Z_i\}.$$

Zeigen Sie, dass jede Gitter-Zerlegung eine Rechteckzerlegung ist. Ist jede Rechteckzerlegung eine Gitter-Zerlegung?

Lösung:

Sei Z eine Gitter-Zerlegung von

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

und Z_i Zerlegungen von $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, sodass

$$Z = \{[c_1, d_1] \times \cdots \times [c_n, d_n] \mid \text{jedes } [c_i, d_i] \text{ ist ein Interval von } Z_i\}.$$

Für (a): sei $J \in Z$, dann gilt

$$J = [c_1, d_1] \times \cdots \times [c_n, d_n]$$

wobei $[c_i, d_i]$ ein Intervall von Z_i ist, für alle $i = 1, \dots n$. Es folgt, dass $[c_i, d_i] \subseteq [a_i, b_i]$ für alle $i = 1, \dots n$. Also $\emptyset \neq J \subseteq I$.

Für (b): sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in I$. Da Z_i eine Zerlegung von $[a_i, b_i]$ ist, gibt ein Intervall $[c_i, d_i]$ von Z_i, sodass $x_i \in [c_i, d_i]$, für alle $i = 1, \dots, n$. Das heißt $x \in [c_1, d_1] \times \dots [c_n, d_n] \in Z$.

Für (c): sei

$$J = [c_1, d_1] \times \cdots \times [c_n, d_n] \text{ und } J = [c_1', d_1'] \times \cdots \times [c_n', d_n']$$

Elementen von Z und $x = (x_1, \dots, x_n) \in J \cap J'$. Dann gilt $x_1 \in [c_1, d_1] \cap [c_1', d_1']$. Da $[c_1, d_1]$, $[c_1', d_1']$ Intervalle von Z_1 sind, folgt, dass $x_1 \in [c_1, d_1] \cap [c_1', d_1'] \subseteq \{c_1, d_1, c_1', d_1'\}$. Also ist x_1 nicht innere Punkt von $[c_1, d_1] \cap [c_1', d_1']$ und deshalb ist x nicht innere Punkt von $J \cap J'$.
Nun bestimmen wir eine Zerlegung Z von $[0,1] \times [0,1]$, die nicht eine Gitter-Zerlegung ist. Erstes bemerken wir das Folgende. Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen von $[0,1]$, Z die Gitter-Zerlegung nach Z_1, Z_2, k_i die Zahl der Intervallen von Z_i $(i = 1,2)$ und k die Zahl der Intervallen von Z. Dann gilt $k = k_1 \cdot k_2$. Also, wenn $k_1, k_2 > 1$, ist die Zahl k nicht Primzahl.
Wir betrachten die Zerlegung

$$Z = \{[0, \frac{1}{2}] \times [0,1],\ [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}],\ [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]\}$$

von $[0,1] \times [0,1]$. Es ist klar, dass $k = 3$. Wenn Z eine Gitter-Zerlegung nach Z_1 und Z_2 wäre, wäre, da 3 Primzahl ist, k_1 oder k_2 gleich 1. $k_1 = 1$ heißt, dass das einzige Intervall von Z_1 $[0,1]$ ist. Das kann aber nicht sein, weil nach der Definition von Z die Zahl $\frac{1}{2}$ ein Element von Z_1 sein muss, (also gibt es ein Intervall von Z_1, dessen linke oder rechte Grenze die Zahl $\frac{1}{2}$ ist). $\dashv$

Aufgabe T11.3 (Satz von Fubini nicht anwendbar)
Gegeben seien das Intervall $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x, y \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3} & \text{falls } (x,y) \in I \setminus \{(0,0)\}; \\ 0 & \text{falls } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f in $(0,0)$ nicht stetig ist.
(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y) \mathrm{d}y) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \text{ und } \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y) \mathrm{d}x) \mathrm{d}y = -\frac{1}{2}$$

gilt. Erläutern Sie, warum die Funktion f nicht Riemann-integrierbar sein kann. Hinweis: Benutzen Sie bei Teil (b) die Substitution $u = x + y$.

Lösung:

(a) Man wähle die Folge

$$(x_n, y_n) = (\frac{2}{n}, \frac{1}{n})$$

für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n}}{(\frac{3}{n})^3} = \frac{n^2}{27},$$

und somit $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \infty$. Also ist f in $(0,0)$ nicht stetig. (b) Wir berechnen das erste Integral. Substituiere

$$u = x + y \text{ mit } \mathrm{d}u = \mathrm{d}y \text{ und } x - y = 2x - u.$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \mathrm{d}y \mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_x^{x+1} \frac{2x-u}{u^3} \mathrm{d}u \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_x^{x+1} (\frac{2x}{u^3} - \frac{1}{u^2}) \mathrm{d}u \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 -\frac{x}{u^2} + \frac{1}{u} \Big|_{u=x}^{u=x+1} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 -\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mittels derselben Substitution berechnen wir das zweite Integral, wobei hier $x - y = u - 2y$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_y^{y+1} \frac{u-2y}{u^3} \mathrm{d}u\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_y^{y+1} (\frac{1}{u^2} - \frac{2y}{u^3}) \mathrm{d}u\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{u} + \frac{y}{u^2}\Big|_{u=y}^{u=y+1} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{y+1} + \frac{y}{(y+1)^2} + \frac{1}{y} - \frac{y}{y^2} \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Wäre die Funktion f Riemann-integrierbar, dann müssten die beiden Doppelintegrale nach dem Satz von Fubini übereinstimmen. Da dies hier nicht der Fall ist, kann f nicht Riemann-integrierbar sein. ⊣