Analysis II für M, LaG/M, Ph
9. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
17.12.2010

Aufgaben

Aufgabe T9.1

(a) Man zeige, dass durch $x^3 + y^2 - 2xy = 0$ in einer Umgebung von $(x, y) = (1, 1)$ eine differenzierbare Funktion $x = \varphi(y)$ mit $\varphi(1) = 1$ implizit definiert ist.

(b) Man berechne die Ableitung $\varphi'(1)$.

(c) Zeigen Sie, dass φ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von $y = 1$ ist und bestimmen Sie $\varphi''(1)$.

(d) Kann man den Satz über implizite Funktionen benutzen, um die Gleichung $x^3 + y^2 - 2xy = 0$ nach y (d.h. $y = \psi(x)$, wobei ψ differenzierbar) um $(1, 1)$ aufzulösen?

Lösung:

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy$ ist stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2x, \quad f(1,1) = 0 \text{ and } \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1 \neq 0.$$

Deshalb unter Verwendung des Satzes über implizite Funktionen , kann man die Gleichung $f(x, y) = 0$ nach x lösen für (x, y) um $(a, b) = (1, 1)$.

Es gibt eine offene Menge U mit $1 \in U$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(1) = a = 1$ und $f(\varphi(y), y) = 0$.

(b) Nun bestimmen wir $\varphi'(1)$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt

$$\varphi'(y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(y), y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(y), y)} = -\frac{2y - 2\varphi(y)}{3\varphi(y)^2 - 2y} \quad \text{for } y \text{ near } 1. \tag{1}$$

Insbesondere $\varphi'(1) = -\frac{2-2}{3-2} = 0$.

(c) Die Formel (1) bestimmt $\varphi'(y)$ nach y and $\varphi(y)$ für y um 1.

Da φ stetig differenzierbar ist, folgt, dass φ' auch stetig differenzierbar ist und deshalb ist die Funktion φ zweimal stetig differenzierbar. Nach dem Kettenregeln folgt

$$\varphi''(y) = -\frac{2 - 2\varphi'(y)}{3\varphi(y)^2 - 2y} + \frac{2y - 2\varphi(y)}{(3\varphi(y)^2 - 2y)^2}\left(6\varphi(y)\varphi'(y) - 2\right).$$

Insbesondere $\varphi''(1) = -2$.

(d) Da $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$, man kann nicht den Satz über implizite Funktionen benutzen, um die Gleichung $f(x, y) = 0$ nach y für (x, y) um $(1, 1)$ zu lösen.

$\dashv$

Aufgabe T9.2
Sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die so definiert ist $f(x,y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$. Zeigen Sie, dass f lokal umkehrbar um alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist. Gegeben sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und g stetig partiell differenzierbar, die um $f(x_0, y_0)$ definiert ist, und $g(z,w) = (x,y) \Longleftrightarrow (z,w) = f(x,y)$, bestimmen Sie die Jakobi-Matrix von g in alle (z,w) um $f(x_0,y_0)$.

Lösung:

Es gilt

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ e^x & -e^y \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \det(J_f(x,y)) = -2e^x e^y \neq 0.$$

Also folgt nach dem Satz über Umkehrfunktion, dass f um alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ lokal umkehrbar ist.
Nun bestimmen wir die Jakobi-Matrix von der oberen g. Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; nach dem Satz über Umkehrfunktion, gilt

$$J_g(z,w) = J_f(x,y)^{-1},$$

wobei $(z,w) = f(x,y)$, für alle (x,y) um (x_0,y_0). Da

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

für alle umkehrbare Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, folgt

$$J_g(z,w) = -\frac{1}{2e^x e^y} \cdot \begin{pmatrix} -e^y & -e^y \\ -e^x & e^x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-x} \\ e^{-y} & -e^{-y} \end{pmatrix},$$

wobei $(z,w) = f(x,y)$, für alle (x,y) um (x_0,y_0). Nun müssen wir die Varianten x, y als Funktionen von z und w bestimmen. Es gilt $(z,w) = f(x,y)$, also

$$z = e^x + e^y \quad \text{und} \quad w = e^x - e^y.$$

Daher

$$e^{-x} = \frac{2}{z+w} \quad \text{und} \quad e^{-y} = \frac{2}{z-w}.$$

Deshalb

$$J_g(z,w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z+w} & \frac{1}{z+w} \\ \frac{1}{z-w} & -\frac{1}{z-w} \end{pmatrix}$$

in alle (z,w) um $f(x_0,y_0)$.

$\dashv$

Aufgabe T9.3
Wir betrachten das Vektorfeld $F(x,y,z) = ((x+y)^3, \sin(xy), xyz)$, $x,y,z \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla \cdot F$ und $\nabla \times F$.
(b) Gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sodass $F = \operatorname{grad} f$?
(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral von F über die $\gamma(t) = (1, t, t^2)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\nabla \cdot F = 3(x+y)^2 + x\cos(xy) + xy$$

und

$$\nabla \times F = (xz, -yz, y\cos(xy) - 3(x+y)^2).$$

(b) Die Antwort ist nein, weil für alle Funktionen f gilt $\nabla \times (\operatorname{grad} f) = 0$. Da $\nabla \times F$ nicht Null ist, gibt es keine Funktion f, für die $F = \operatorname{grad} f$.

(c) Es ist klar, dass $F(\gamma(t)) = ((1+t)^3, \sin t, t^3)$, und $\gamma'(t) = (0, 1, 2t)$. Also ist das Kurvenintegral gleich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t + 2t^4 \, dt = 1 + \frac{\pi^5}{80}.$$