Analysis II für M, LaG/M, Ph
8. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
10.12.2010

Aufgaben

Aufgabe T8.1
Es sei D ein ebenes Dreieck mit den Seitenlängen $a, b, c > 0$, Umfang $u := a + b + c$ und Flächeninhalt

$$F := \frac{1}{4}\left(u(u-2a)(u-2b)(2(a+b)-u)\right)^{1/2}.$$

Zeigen Sie:
Unter allen Dreiecken D mit festem Umfang hat das gleichseitige Dreieck den größten Flächeninhalt.

Lösung: Wir betrachten die Funktion $G = F^2$, also $G(a,b) = \frac{u}{16}((u-2a)(u-2b)(2(a+b)-u))$ auf der Menge $K = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le a \le u/2 \text{ und } a+b \ge u/2\}$. Andere Kombinationen für a und b kommen aus Symmetriegründen nicht in Frage und da D sonst kein Dreieck ist. Außerdem gilt $G > 0$ im Inneren von K und $G = 0$ auf dem Rand. G ist stetig und K kompakt, daher nimmt G sein Maximum im Inneren von K an. (Das Minimum ist 0.)
Die kritischen Punkte von G ergeben sich aus

$$\partial_1 G(a,b) = \frac{u}{16}(u-2b)\left(-2(2(a+b)-u)+2(u-2a)\right)$$
$$\partial_2 G(a,b) = \frac{u}{16}(u-2a)\left(-2(2(a+b)-u)+2(u-2b)\right)$$

also

$$\begin{aligned}\partial_1 G(a,b) = 0 &\Leftrightarrow -2(a+b)+u+u-2a = 0\\ &\Leftrightarrow -4a-2b+2u = 0\\ &\Leftrightarrow u = 2a+b\end{aligned}$$

und analog folgt $\partial_2 G(a,b) = 0 \iff u = 2b + a$. Also verschwindet der Gradient von G genau dann, wenn $u = 2a + b = 2b + a$ und damit $a = b = \frac{u}{3}$. Dies ist also einziger kritischer Punkt und G muss dort sein Maximum annehmen. $a = b = \frac{u}{3}$ heißt aber, dass D gleichseitig ist.

Aufgabe T8.2
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion und $f'(x)$ invertierbar für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass f eine offene Abbildung ist, d.h. $f(U)$ ist offen, falls $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist.

Lösung: Es sei $y \in f(U)$ und $x \in U$ mit $f(x) = y$. Da $f'(x)$ invertierbar ist gibt es nach dem Umkehrsatz Umgebungen V von x und W von $f(x) = y$, so dass $f|_V : V \to W$ eine stetig differenzierbare Umkehrfunkiton $g : W \to V$ besitzt. Also ist $f(V \cap U) = g^{-1}(V \cap U)$ offen, da g stetig ist. Damit folgt, da $y \in f(V \cap U)$, dass es eine Umgebung U_y von y mit $U_y \subseteq f(V \cap U) \subseteq f(U)$ gibt. Da $y \in f(U)$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Aufgabe T8.3
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 3x^4 - 4x^2y + y^2,$$

eingeschränkt auf eine Gerade durch den Ursprung, dort ein lokales Minimum besitzt. Ist der Ursprung lokales Minimum von f?

Lösung: Eine Gerade durch den Ursprung ist gegeben durch $g_\mathsf{v} = \{(t\mathsf{v}_1, t\mathsf{v}_2) : t \in \mathbb{R}\}$, wobei $\mathsf{v} = (\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2) \in \mathbb{R}^2\}$. Damit ist f eingeschränkt auf g gegeben durch $h(t) := f|_g(t) = 3\mathsf{v}_1^4 t^4 - 4\mathsf{v}_1^2\mathsf{v}_2 t^3 + \mathsf{v}_2^2 t^2$. Weiter gilt $h'(t) = 12\mathsf{v}_1^4 t^3 - 12\mathsf{v}_1^2\mathsf{v}_2 t^2 + 2\mathsf{v}_2^2 t$ und $h''(t) = 36\mathsf{v}_1^4 t^2 - 24\mathsf{v}_1^2\mathsf{v}_2 t + 2\mathsf{v}_2^2$. Also gilt $h'(0) = 0$ und $h''(0) = 2\mathsf{v}_2^2 > 0$, falls $\mathsf{v}_2 \neq 0$. Damit hat h in diesem Fall ein lokales Minimum. Ist $\mathsf{v}_2 = 0$, so ist h gegeben durch $h(t) = 3\mathsf{v}_1^4 t^4$ und diese Funktion hat in $t = 0$ offensichtlich ein Minimum.
Die Funktion f hat im Nullpunkt jedoch keinen Extremwert, da $f(\varepsilon/2, \varepsilon^2/2) = -\frac{1}{16}\varepsilon^4 < 0$ und $f(0, \varepsilon) > 0$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt.