Analysis II für M, LaG/M, Ph
7. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
03.12.2010

Aufgaben

Aufgabe T7.1

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die so definiert ist:

$$f(x,y) = x^3y^2 + 4xy - 2x^2 + y^3.$$

(a) Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom $T_p^2 f(x,y)$ von f in der Stelle $(1,1)$.

(b) Unter Verwendung des $T_p^2 f(x,y)$ berechnen Sie eine Approximation von $f(1.1, 0.95)$.

Lösung:

(a) Es gilt $f(1,1) = 4$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4y - 4x$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 4x + 3y^2$ und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2 - 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2y + 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 + 6y.$$

Also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 10, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 8.$$

Deshalb ist das 2-te Taylorpolynom gleich

$$T_p^2 f(x,y) = 4 + 3(x-1) + 9(y-1) + (x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) + 4(y-1)^2.$$

(b) Wir wissen, dass $f(1.1, 0.95) \approx T_p^2 f(1.1, 0.95)$. So

$$f(1.1, 0.95) \approx T_2(1.1, 0.95) = 4 + 3(0.1) + 9(-0.05) + (0.1)^2 + 10(0.1)(-0.05) + 4(-0.05)^2.$$

Aufgabe T7.2

Bestimmen Sie alle differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die $f'(x,y) = (f(x,y) \; f(x,y))$ (d.h. $f_x(x,y) = f_y(x,y) = f(x,y)$) für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $f(0,0) = 1$ gilt.

Hinweis. Betrachten Sie die Funktion $g(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{e^x \cdot e^y}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Erstes berechnen wir die Ableitung von $g(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{e^x \cdot e^y}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Nach der Kettenregel und der Voraussetzung folgt

$$g_x(x,y) = \frac{1}{e^y} \cdot \frac{f_x(x,y) \cdot e^x - f(x,y) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{1}{e^y} \cdot \frac{f(x,y) \cdot e^x - f(x,y) \cdot e^x}{(e^x)^2} = 0.$$

Ebenso $g_y(x,y) = 0$. Also $g'(x,y) = (0 \; 0)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Somit ist die Funktion g konstante. Sei $c \in \mathbb{R}$, sodass $g(x,y) = c$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Das heißt $f(x,y) = c \cdot e^x \cdot e^y$. Nun bestimmen wir dieses c. Nach der Voraussetzung $f(0,0) = 1$, also $1 = c \cdot e^0 \cdot e^y$, d.h. $c = 1$. Dies liefert, dass

$$f(x,y) = e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. ⊣

Aufgabe T7.3 (Formel von Leibniz)
Gegeben seien $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \dots, n$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und Funktionen $f, g : U \to \mathbb{R}$, die $|\alpha|$-mal partial differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass

$$D^\alpha(fg)(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n, \beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f(x) D^{\alpha-\beta} g(x) \tag{1}$$

wobei $\beta \le \alpha$ genau wenn $\beta_i \le \alpha_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$, und

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} := \prod_{i=1}^n \frac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i - \beta_i)!},$$

für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n, \beta \le \alpha$.
Hinweis. Benutzen Sie Induktion über die Dimension n.

Lösung:

Für $n = 1$: sei $p \in \mathbb{N}_0$ und $f, g : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ p-mal differenzierbare. Dann gilt

$$(fg)^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)}(x) g^{(p-k)}(x). \tag{2}$$

Wir zeigen (2) über Induktion in p.
Für $p = 1$, die Gleichung (2) ist klar:

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} f^{(1-k)}(x) g^{(k)}(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (f \cdot g)'(x).$$

Gegeben sei, dass die Gleichung (2) für p gilt. Wir zeigen sie für $p + 1$:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(p+1)}(x) &= \left[(fg)^{(p)}\right]'(x) = \left[\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}\right]'(x) \\
&= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(p-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(p-k+1)}(x)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(p-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)}(x) g^{(p-k+1)}(x) \\
&= f^{(p+1)}(x) g(x) + \sum_{k=1}^p \binom{p+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(p-k+1)}(x) + f(x) g^{(p+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(p-k+1)}(x).
\end{aligned}$$

[Es gilt

$$\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} = \binom{p+1}{k},$$

weil:

$$\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} = \frac{p!}{(p-k+1)!(k-1)!} + \frac{p!}{(p-k)!k!} = \frac{p!(k)}{(p-k+1)!k!} + \frac{p!(p-k+1)}{(p-k+1)!k!}$$

$$= \frac{p!(k+p-k+1)}{(p-k+1)!k!} = \frac{(p+1)!}{(p-k+1)!k!} = \binom{p+1}{k}.]$$

Gegeben sei, dass das Formel von Leibniz für n gilt. Sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ und $\gamma := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
D^\alpha(f \cdot g)(x) &= D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} D_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(f \cdot g)(x) = D^\gamma \left(D_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\right)(f \cdot g)(x) \\
&= D^\gamma \left(\sum_{\beta_{n+1}=0}^{\alpha_{n+1}} \binom{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} D_{n+1}^{\beta_{n+1}} f(x) \cdot D_{n+1}^{\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}} g(x) \right) \\
&\qquad \text{(Leibniz Formel für } n = 1) \\
&= \sum_{\beta_{n+1}=0}^{\alpha_{n+1}} \binom{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} D^\gamma \left(D_{n+1}^{\beta_{n+1}} f(x) \cdot D_{n+1}^{\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}} g(x) \right),
\end{aligned}$$

und nach der Induktionsvoraussetzung

$$= \sum_{\beta_{n+1}=0}^{\alpha_{n+1}} \binom{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} \sum_{\theta \in \mathbb{N}_0^n,\, \theta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\theta} D^\theta D_{n+1}^{\beta_{n+1}} f(x) \cdot D^{\gamma-\theta} D_{n+1}^{\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}} g(x)$$

$$= \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{n+1},\, \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f(x) D^{\alpha-\beta} g(x).$$