Analysis II für M, LaG/M, Ph
6. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
26.11.2010

Aufgaben

Aufgabe T6.1 (Die Exponentialfunktion für Matrizen)
Die Exponentialfunktion für Matrizen $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist durch

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

gegeben. Verwenden Sie ohne Beweis, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\|A^k\|$ für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konvergent ist. (Sie dürfen das natürlich auch gerne beweisen.)

(a) Zeigen Sie, dass exp wohldefiniert ist.

(b) Berechnen Sie die Exponentialfunktion von

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Es seien $A, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und P invertierbar. Zeigen Sie, dass $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$ gilt.

(d) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Matrixexponentialabbildung in Richtung A am Punkt $\mathbf{0}$ (d.h. bei der Nullmatrix).

Lösung:

(a) Für eine beliebige Norm in $\mathbb{R}^{n\times n}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$ absolut, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\|A^k\| < \infty$. Das heißt, dass jede Komponente $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_k^{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ konvergent ist.

(b) Da

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

folgt

$$e^A = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

Da

$$B^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

folgt

$$e^B := \begin{pmatrix} e & 2e & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

(c) Es gilt

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} P^{-1}A^k P = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k\right) P$$

(d) Es gilt

$$\exp(A) - \exp(\mathbf{0}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k - A^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k.$$

Somit folgt

$$\lim_{t\to 0} \frac{\exp(tA) - \exp(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k}{t} = \lim_{t\to 0} A + \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k}{t} = A.$$

Aufgabe T6.2

Gegeben seien zwei Funktionen $f, F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, wobei f stetig differenzierbar ist und $\nabla f(x) = x \cdot F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt. Zeigen Sie, dass $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\|_2 = \|y\|_2$ gilt.

Lösung: Für $x = 0$ ist die Aussage klar. Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und setze $h(x) = \frac{x}{\|x\|_2}\|x_0\|_2$. Da $\|h(x)\|_2$ konstant ist folgt $\nabla\|h(x)\|_2 = 0$. Andererseits gilt $\nabla(\|x\|_2) = \frac{x}{\|x\|_2}$ und daher folgt mit der Kettenregel

$$0 = \nabla\|h(x)\|_2 = \nabla(\|\cdot\|_2)(h(x)) \cdot \nabla h(x) = \frac{h(x) \cdot \nabla h(x)}{\|x\|_2}.$$

Also folgt $h(x) \cdot \nabla h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Nun folgt

$$\nabla(f \circ h) = (\nabla f) \circ h \cdot \nabla h = h \cdot \nabla h F \circ h = 0.$$

Damit folgt, dass f konstant auf der Sphäre mit Radius $\|x_0\|_2$ ist, was die Behauptung liefert, da h $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ surjektiv auf diese Sphäre abbildet.