Analysis II für M, LaG/M, Ph
5. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
19.11.2010

Aufgaben

Aufgabe T5.1

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$ an jedem Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, wobei f so definiert ist: $f(x,y,z) = x \cdot e^{-x^2-y^2-z^2}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(b) Gegeben seien $u = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in \mathbb{R}^3$ und $f(x,y,z) = z^2 x + y^3$, $x,y,z \in \mathbb{R}$, berechnen Sie die Richtungsableitung $\mathrm{d}_u f(1,1,2)$ von f in Richtung u an $(1,1,2)$.

Lösung:

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 1 \cdot e^{-x^2-y^2-z^2} + x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2-y^2-z^2} = e^{-x^2-y^2-z^2}(1-2x^2);\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -2yx \cdot e^{-x^2-y^2-z^2};\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= -2zx \cdot e^{-x^2-y^2-z^2}.
\end{aligned}$$

Also

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0) = e^{-x_0^2-y_0^2-z_0^2} \cdot (1-2x_0^2, -2y_0x_0, -2z_0x_0).$$

(b) Es gilt $f(1,1,2) = 2^2 \cdot 1 + 1^3 = 5$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
f((1,1,2)+tu) &= f(1+\frac{t}{\sqrt{3}}, 1+\frac{t}{\sqrt{3}}, 2+\frac{t}{\sqrt{3}})\\
&= (2+\frac{t}{\sqrt{3}})^2 \cdot (1+\frac{t}{\sqrt{3}}) + (1+\frac{t}{\sqrt{3}})^3\\
&= \frac{1}{(\sqrt{3})^3} \cdot [(2\sqrt{3}+t)^2(\sqrt{3}+t) + (\sqrt{3}+t)^3]\\
&= \ldots\\
&= \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot (2t^3 + 8\sqrt{3}t^2 + 33t + 15\sqrt{3})\\
&= \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot (2t^3 + 8\sqrt{3}t^2 + 33t) + 5\\
&= \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot (2t^3 + 8\sqrt{3}t^2 + 33t) + f(1,1,2).
\end{aligned}$$

Deshalb gilt für jedes $t \neq 0$, dass

$$\begin{aligned}\frac{f((1,1,2)+tu)-f(1,1,2)}{t} &= \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot(2t^3+8\sqrt{3}t^2+33t)\\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot(2t^2+8\sqrt{3}t+33).\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_u f(1,1,2) &:= \lim_{t\to 0}\frac{f((1,1,2)+tu)-f(1,1,2)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot(2t^2+8\sqrt{3}t+33)\\ &= \frac{33}{3\sqrt{3}}=\frac{11\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

⊣

Aufgabe T5.2
Gegeben sei eine Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ und $p\in\mathbb{R}^n$. Angenommen, dass f partielle differenzierbar in p ist (das heißt jedes $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, $i=1,\dots,n$ existiert) und f auf p ein lokales Maximum annimmt, zeigen Sie, dass $\mathrm{grad} f(p)=0$.
Hinweis. Wenn die Funktion $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ auf $t_0\in\mathbb{R}$ ein lokales Maximum annimt und $h'(t_0)$ existiert, folgt $h'(t_0)=0$.

Lösung:

Für jedes $i=1,2,\dots,n$, betrachten wir die Funktion

$$h_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: h_i(t)=f(p+t\cdot e_i),$$

wobei $e_i=(0,0,\dots,1,\dots,0)$ und 1 liegt auf der Stelle i. Das heißt $h_i(t)=f(p_1,\dots,p_i+t,\dots,p_n)$, wobei $p=(p_1,\dots,p_n)$.
Beachten Sie, dass

$$\frac{f(p+t\cdot e_i)-f(p)}{t}=\frac{h_i(t)-h_i(0)}{t}.$$

Da jedes $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)=\lim_{t\to 0}\frac{f(p+t\cdot e_i)-f(p)}{t}$ existiert, folgt, dass die Funktion h_i differenzierbar in 0 ist und $h_i'(0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, für alle $i=1,\dots,n$. Nun zeigen wir, dass 0 ein lokales Maximum von jedem h_i ist. Der Punkt p ist ein lokales Maximum von f. Das bedeutet, dass eine offene Menge $U\subseteq\mathbb{R}^n$ gibt, sodass $p\in U$ und $f(x)\le f(p)$ für alle $x\in U$. Da U offen ist und $p\in U$, gibt ein $\delta_i>0$, sodass $p+t\cdot e_i\in U$ für alle $t\in(-\delta_i,\delta_i)$. Also $h_i(t)=f(p+t\cdot e_i)\le f(p)=h_i(0)$ für alle $t\in(-\delta_i,\delta_i)$. Deshalb ist 0 ein lokales Maximum von h_i.
Da $h_i'(0)$ existiert, folgt nach dem Hinweis, dass $h_i'(0)=0$. Also $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)=0$ für jedes $i=1,\dots,n$. Das bedeutet $\mathrm{grad} f(p)=0$. ⊣

Aufgabe T5.3
Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, die so definiert ist:
$f(x,y)=(x^2+y^2)\cdot\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ wenn $(x,y)\neq(0,0)$ und $f(0,0)=0$. Zeigen Sie, dass

(a) die partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ auf jedem Punkt $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ existieren;

(b) die partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht stetig sind, und

(c) die Funktion f differenzierbar ist.

Lösung:

Beachten Sie, dass $f(x,y)=f(y,x)$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Also f ist symmetrisch.

(a) Für $(x,y)\neq(0,0)$ berechnen wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\cdot\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})+(x^2+y^2)\cdot(-\frac{1}{2})\cdot\frac{2x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\cdot\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})\\ &= 2x\cdot\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}).\end{aligned}$$

Da f symmetrisch ist, gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\cdot\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}),$$

für alle $(x,y)\neq(0,0)$. Nun berechnen wir die partielle Ableitungen in $(0,0)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot h^2\cdot\sin(\frac{1}{|h|})\\ &= \lim_{h\to0}h\sin(\frac{1}{|h|})=0.\end{aligned}$$

(Die letzte Grenze ist gleich 0 weil $\sin(\frac{1}{|h|})\leq1$ für alle $h\neq0$). Da f symmetrisch ist, folgt $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

(b) Nun zeigen wir, dass die partielle Ableitungen nicht stetig in $(0,0)$ sind. Beachten Sie, dass für $x_0>0$, gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=2x_0\sin(\frac{1}{x_0})-\cos(\frac{1}{x_0})$. Also

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{2\pi n},0)=\frac{2}{2\pi n}\sin(2\pi n)-\cos(2\pi n)=0-1=-1$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Deshalb $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{2\pi n},0)\not\to\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und natürlich $(\frac{1}{2\pi n},0)\to(0,0)$. Somit die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht stetig in $(0,0)$ ist. Ebenso beweise man, dass $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht stetig in $(0,0)$ ist.

(c) Wir zeigen, dass die Funktion f differenzierbar auf jedem Punkt (x,y) ist. Dies ist klar, wenn $(x,y)\neq(0,0)$, also betrachten wir nur den Punkt $(0,0)$. Beachten Sie, dass die Ableitung von f in $(0,0)$ gleich $(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0))=(0\ \ 0)$ sein muss. Also betrachten wir die Matrix $A=(0\ \ 0)$ und wir definieren

$$r(x,y):=f(x,y)-f(0,0)-A\cdot\begin{pmatrix}x-0\\ y-0\end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Beachten Sie, dass $r(x,y)=f(x,y)$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Wir müssen zeigen, dass $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$. Für $(x,y)\neq(0,0)$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} &= \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(x^2+y^2)\cdot\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})\\ &= \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})\leq\sqrt{x^2+y^2}=\|(x,y)\|;\end{aligned}$$

somit $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$.

⊣