Analysis II für M, LaG/M, Ph
4. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
12.11.2010

Aufgaben

Aufgabe T4.1
Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\operatorname{dist}(\cdot,A) : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\operatorname{dist}(x,A) := \inf_{y \in A} d(x,y)$$

(Lipschitz-)stetig ist.

Lösung: Es seien $x,y \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $a_0 \in A$, so dass $d(y,a_0) \le f(y)+\varepsilon$, also $f(y) \ge d(y,a_0)-\varepsilon$. Damit folgt

$$\begin{aligned} f(x)-f(y) &= \inf\{d(x,a) \mid x \in A\} - f(y) \le d(x,a_0) - f(y) \\ &\le d(x,a_0) - d(y,a_0) + \varepsilon \\ &\le d(x,y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

genauso erhält man $f(y)-f(x) \le d(x,y)+\varepsilon$ und daher auch

$$|f(x)-f(y)| \le d(x,y)+\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt

$$|f(x)-f(y)| \le d(x,y)$$

und dies liefert die Lipschitzstetigkeit mit Lipschitzkonstante 1.

Aufgabe T4.2 (Lemma von Urysohn)
Beweisen Sie die folgende Aussage: Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $A,B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es eine stetige Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$, für die $\varphi(x) = 1$ für alle $x \in A$ und $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in B$ gilt.

Lösung: Wir definieren $\varphi : X \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) := \frac{\operatorname{dist}(x,B)}{\operatorname{dist}(x,A)+\operatorname{dist}(x,B)}.$$

Dann gilt:

(a) φ ist stetig.
Dies folgt mit T4.1, falls $\operatorname{dist}(x,A)+\operatorname{dist}(x,B) \neq 0$ für alle $x \in X$. Wir nehmen an, dem sei nicht so. Dann gibt es ein $x \in X$, so dass $\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{dist}(x,B) = 0$ gilt. Dann gibt es eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $\operatorname{dist}(x,A) = \lim_{n\to\infty} d(x,y_n) = 0$. (Wähle y_n, so dass $d(x,y_n) \le \operatorname{dist}(x,A) + \frac{1}{n}$.)
Also gilt $y_n \to x$ in X. Da A abgeschlossen ist, folgt $x \in A$. Analog folgt auch $x \in B$ wegen $\operatorname{dist}(x,B) = 0$. Dies liefert jedoch einen Widerspruch zu $A \cap B = \emptyset$.

(b) $\varphi(x) = 1$ für $x \in A$ und $\varphi(x) = 0$ für $x \in B$.
Für $x \in A$ gilt $\operatorname{dist}(x,A) = 0$, also $\varphi(x) = 1$ und für $x \in B$ gilt $\operatorname{dist}(x,B) = 0$ und $\operatorname{dist}(x,A) \neq 0$, also $\varphi(x) = 0$.

Aufgabe T4.3
Zeigen Sie, dass die Supremumsnorm in $\mathbb{R}^n$ nicht durch ein Skalarprodukt definiert werden kann. Das heißt, es gibt kein Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\|x\|_\infty = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

Lösung: Beweis durch Beispiel: Es sei zunächst $n = 2$. Angenommen es gäbe ein Skalarprodukt, so dass $\|x\|_\infty = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt. Wir setzen

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad z := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für $u, \mathsf{v} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|u + \mathsf{v}\|_\infty^2 &= \langle u + \mathsf{v} \mid u + \mathsf{v} \rangle = \|u\|_\infty^2 + 2\langle u \mid \mathsf{v} \rangle + \|\mathsf{v}\|_\infty^2 \\ \|u - \mathsf{v}\|_\infty^2 &= \langle u - \mathsf{v} \mid u - \mathsf{v} \rangle = \|u\|_\infty^2 - 2\langle u \mid \mathsf{v} \rangle + \|\mathsf{v}\|_\infty^2 \end{aligned}$$

und daher folgt

$$\|u + \mathsf{v}\|_\infty^2 - \|u - \mathsf{v}\|_\infty^2 = 4\langle u \mid \mathsf{v} \rangle$$

Das heißt, mit $u = x$ und $\mathsf{v} = y$ gilt $\langle x \mid y \rangle = 0$. Daher folgt mit $u = z = x + y$ und $\mathsf{v} = x$

$$\|z + x\|_\infty^2 - \|z - x\|_\infty^2 = 3 = 4\langle z \mid x \rangle = 4\langle x \mid x \rangle + 4\langle y \mid x \rangle = 4\|x\|_\infty^2$$

also $\|x\|_\infty^2 = \frac{3}{4}$ ein Widerspruch!.
Für den allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}$ ergänze man die Vektoren x, y, z durch Nullen.