Analysis II für M, LaG/M, Ph
3. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
05.11.2010

Aufgaben

Aufgabe T3.1

(a) Gegeben sei der metrische Raum $X = \mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$ und die Menge $A = (0, 1]$. Zeigen Sie, dass

$$\overline{A} = [0, 1] \quad \text{und} \quad A^\circ = (0, 1).$$

Hinweis. Es gilt $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

(b) Gegeben sei der metrische Raum $X = (0, 1] \cup (2, 3)$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in X$ und die Menge $A = (0, 1]$. Zeigen Sie, dass

$$\overline{A} = (0, 1] \quad \text{und} \quad A^\circ = (0, 1].$$

Lösung:

(a) Für $\overline{A} = [0, 1]$.

Es gilt,

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A, \quad \text{sodass} \quad x_n \to x.$$

Erstes zeigen wir, dass $\overline{A} \subseteq [0, 1]$. Sei $x \in \overline{A}$; das bedeutet, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass $x_n \in A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und $x_n \to x$. Da $x_n \in (0, 1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to x$, folgt $x \in [0, 1]$. Also $\overline{A} \subseteq [0, 1]$.

Da $A \subseteq \overline{A}$, ist es klar, dass $(0, 1] \subseteq \overline{A}$. Nun zeigen wir, dass $0 \in \overline{A}$. Da $\frac{1}{n} \in A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{n} \to 0$ folgt $0 \in \overline{A}$. Also $[0, 1] \subseteq \overline{A}$.

Für $A^\circ = (0, 1)$.

Es gilt

$$x \in A^\circ \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ sodass } U_\varepsilon(x) \subseteq A,$$

also

$$x \notin A^\circ \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } U_\varepsilon(x) \nsubseteq A,$$

wobei $U_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$. Auf unserem Fall ist die Menge $U_\varepsilon(x)$ gleich $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Erstes Zeigen wir, dass $(0, 1) \subseteq A^\circ$. Sei ein $x \in (0, 1)$; es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (0, 1]$, (z.B. $\varepsilon = \min\{x, 1 - x\} > 0$); also $U_\varepsilon(x) \subseteq A$. Das bedeutet $x \in A^\circ$ für alle $x \in (0, 1)$.

Da $A^\circ \subseteq A$, gilt $(0, 1) \subseteq A^\circ \subseteq (0, 1]$. Also müssen wir zeigen, dass die Zahl 1 nicht zu A° gehört. (Dann folgt $A^\circ = (0, 1)$).

Für alle $\varepsilon > 0$ die reale Zahl $1 + \varepsilon/2$ gehört zu $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) = U_\varepsilon(1)$ und doch $1 + \varepsilon/2 \notin (0, 1] = A$. Das heißt, dass $U_\varepsilon(1) \nsubseteq A$ für alle $\varepsilon > 0$. Also $1 \notin A^\circ$.

(b) Der Unterschied ist, dass nun der metrische Raum nicht das ganze $\mathbb{R}$ ist. Das bedeutet, dass

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow x \in X \ \& \ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A, \quad \text{sodass} \quad x_n \to x.$$

und

$$U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X$$

für alle $x \in X$.

Für $\overline{A} = (0,1]$.

Da $A \subseteq \overline{A}$, ist es klar, dass $(0,1] \subseteq \overline{A}$. Sei ein $x \in \overline{A}$; da $x \in \overline{A}$, gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A = (0,1]$, sodass $x_n \to x$. Also $x \in [0,1]$; da $x \in X$, folgt, dass $x \neq 0$. Deshalb $x \in (0,1]$, also $A \subseteq (0,1]$.

Für $A^\circ = (0,1]$.

Sei ein $x \in (0,1)$; es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (0,1]$, (z.B. $\varepsilon = \min\{x, 1-x\} > 0$). Es gilt $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (\ (0,1] \cup (2,3)\ ) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, weil $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (0,1]$. Also $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (0,1] = A$. Damit $(0,1) \subseteq A$.

Da $A^\circ \subseteq A$, gilt $(0,1) \subseteq A^\circ \subseteq (0,1]$. Nun zeigen wir, dass $1 \in A^\circ$. Wir nehmen $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Es folgt, dass

$$U_{1/2}(1) = (1-1/2, 1+1/2) \cap X = (1/2, 3/2) \cap (\ (0,1] \cup (2,3)\ ) = (1/2, 1].$$

Also $U_{1/2}(1) \subseteq A$, dass bedeutet $1 \in A^\circ$. Deshalb $A^\circ = (0,1]$.

$\dashv$

Aufgabe T3.2

(a) Sei $A = \cap_{n=1}^\infty (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $B = \cap_{n=1}^\infty (0, \frac{1}{n})$ und $C = \cup_{n=1}^\infty (\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$. Zeigen Sie, dass

$$A = \{0\}, \quad B = \emptyset, \quad C = (0,1).$$

Hinweis. Es gilt $x \in \cap_{i\in I} A_i$ genau wenn für jedes $i \in I$, $x \in A_i$ und $x \in \cup_{i\in I} A_i$ genau wenn ein $i_0 \in I$ existiert, sodass $x \in A_{i_0}$.

(b) Gegeben sei ein metrischer Raum (X,d) und offene Mengen A_i, $i \in I$. Zeigen Sie, dass die Menge $A = \cup_{i\in I} A_i$ auch offen ist.

(c) Gegeben sei ein metrischer Raum (X,d) und offene Mengen $A_1, \ldots, A_n$. Zeigen Sie, dass die Menge $A = \cap_{k=1}^n A_k$ auch offen ist.

Lösung:

(a) Es ist klar, dass $0 \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also $\{0\} \subseteq \cap_{n=1}^\infty (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Sei ein $x \in \cap_{n=1}^\infty (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$; das heißt, dass $|x| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also $|x| = 0$, deshalb $x = 0$.

Wenn es ein $x \in B$ gäbe, würde $x > 0$ und $x < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Das ist ein Widerspruch, weil für jedes $x > 0$ gibt ein n_0, sodass $n_0 > \frac{1}{x}$ und deshalb $\frac{1}{n_0} < x$.

Es ist klar, dass jedes Intervall $(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ zu $(0,1)$ enthält. Also $\cup_{n=1}^\infty (\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] \subseteq (0,1)$. Sei ein $x \in (0,1)$. Da $x > 0$, gibt ein n_0, sodass $\frac{1}{n_0} < x$. Da $x < 1$, gibt ein n_1, sodass $x < 1 - \frac{1}{n_1}$. Wir nehmen $N = \max\{n_0, n_1\}$. Es gilt $\frac{1}{N} \leq \frac{1}{n_0} < x$ und $x < 1 - \frac{1}{n_1} \leq 1 - \frac{1}{N}$. Also $x \in (\frac{1}{N}, 1-\frac{1}{N}) \subseteq (\frac{1}{N}, 1-\frac{1}{N}] \subseteq \cup_{n=1}^\infty (\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$. Deshalb $(0,1) \subseteq \cup_{n=1}^\infty (\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$.

(b) Eine Menge $A \subseteq (X,d)$ ist offen genau wenn für jedes $x \in A$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $U_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\} \subseteq A$.

Gegeben sei $x \in \cup_{i\in I} A_i$. Das heißt, dass ein $i_0 \in I$ gibt, sodass $x \in A_{i_0}$. Da A_{i_0} offen ist, folgt, dass ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $U_\varepsilon(x) \subseteq A_{i_0}$. Da $A_{i_0} \subseteq \cup_{i\in I} A_i$, gilt $U_\varepsilon(x) \subseteq \cup_{i\in I} A_i$. Also ist $\cup_{i\in I} A_i$ offen.

(c) Sei $x \in \cap_{k=1}^n A_k$. Das heißt, dass $x \in A_k$ für jedes $k = 1, \ldots, n$. Da jedes A_k offen ist, gibt ein $\varepsilon_k > 0$, sodass $U_{\varepsilon_k}(x) \subseteq A_k$ für jedes $k = 1, \ldots, n$. Wir nehmen $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} > 0$. Es ist klar, dass $U_\varepsilon(x) \subseteq U_{\varepsilon_k}(x)$ für jedes $k = 1, \ldots, n$. Also $U_\varepsilon(x) \subseteq A_k$ für jedes $k = 1, \ldots, n$; deshalb $U_\varepsilon(x) \subseteq \cap_{k=1}^n A_k$. Das bedeutet, dass die Menge $\cap_{k=1}^n A_k$ offen ist.

$\dashv$

Aufgabe T3.3
Gegeben sei ein Vektorraum V und zwei Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ auf V, für die es $A, B > 0$ gibt, sodass

$$A \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B \cdot \|x\|_1$$

für alle $x \in V$. Zeigen Sie, dass für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ und für alle $x \in V$ gilt:

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x \quad \text{genau wenn} \quad x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x.$$

Lösung:

Nach Voraussetzung folgt

$$A \cdot \|x_n - x\|_1 \leq \|x_n - x\|_2 \leq B \cdot \|x_n - x\|_1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$, gilt $B \cdot \|x_n - x\|_1 \to 0$; also $\|x_n - x\|_2 \to 0$. Das bedeutet $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$. Falls $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$, gilt $A \cdot \|x_n - x\|_1 \to 0$. Also $\|x_n - x\|_1 \to 0$ und weiterhin $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$. $\dashv$