Analysis II für M, LaG/M, Ph
2. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
29.10.2010

Aufgaben

Aufgabe T2.1 (Ein alter Bekannter)
Sei die Funktion $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie nur durch Anwendung von Integrationsregeln, also nicht mit Vorkenntnissen über die Logarithmusfunktion, dass für $u, v \in \mathbb{R}^+$

$$L(uv) = L(u) + L(v)$$

gilt.

Lösung:

$$L(uv) = \int_1^{uv} \frac{1}{t} dt = \int_{1/v}^{u} \frac{1}{vx} v\,dx = L(u) + \int_{1/v}^{1} \frac{1}{x} dx = L(u) + \int_1^{v} \frac{1}{t/v}\frac{1}{v} dt = L(u) + L(v).$$

Aufgabe T2.2
Ein Kanalprofil wird durch eine Funktion $\sigma(h)$ beschrieben, die der Wasserhöhe h im Kanal die dazugehörige Breite der Wasseroberfläche zuordnet.
Berechnen Sie die benetzte Querschnittsfläche $A(h)$ zur Wasserhöhe h,

$$A(h) = \int_0^h \sigma(s)\,\mathrm{d}s$$

für folgende Fälle:

(a) Trapezprofil, $\sigma(s) = b + 2\tau s$,

(b) Rohrprofil, $\sigma(s) = 2\sqrt{s(2r - s)} = 2r\sqrt{1 - (1 - s/r)^2}$, $h \leq 2r$.

Leiten Sie dabei zunächst die Formeln für $\sigma(s)$ her!

Lösung: a) $A(h) = bh + \tau h^2$
b) Setze

$$H(t) = (t/2)\sqrt{1 - t^2} + (1/2)\arcsin(t).$$

Dann folgt

$$H'(t) = (1/2)\sqrt{1 - t^2} + (1/2)(1 - t^2)/\sqrt{1 - t^2} = \sqrt{1 - t^2}$$

Also gilt

$$\int_a^b \sqrt{1 - t^2}\,dt = H(b) - H(a).$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\sigma(s) &= 2\sqrt{s(2r-s)} \\
&= 2\sqrt{r^2-(r-s)^2} \\
&= 2r\sqrt{1-((r-s)/r)^2} \\
&= 2r\sqrt{1-(1-(s/r))^2}
\end{aligned}
$$

Zu berechnen ist

$$A(h) = \int_0^h \sigma(s)\,ds = 2r\int_0^h \sqrt{1-(1-s/r)^2}\,ds$$

Mit der Substitution $1-s/r=t$ folgt $ds=-r\,dt$ und

$$A(h) = 2r\int_1^{1-h/r}\sqrt{1-t^2}(-r)\,dt = 2r^2\int_{1-h/r}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = 2r^2[H(1)-H(1-h/r)].$$

mit $H(1)=(1/2)\arcsin(1)=\pi/4$ und

$$H(1-h/r) = (1/2)(1-h/r)\sqrt{1-(1-h/r)^2}+(1/2)\arcsin(1-h/r)$$

folgt

$$A(h) = \pi r^2/2 - r^2\left[(1-h/r)\sqrt{1-(1-(h/r))^2}+\arcsin(1-h/r)\right].$$

Aufgabe T2.3

Es sei $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ eine monoton fallende Funktion mit $f(x)\xrightarrow{x\to\infty}0$. Zeigen Sie, dass $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $g(x)=\sin(x)f(x)$ uneigentlich integrierbar auf $[0,\infty)$ ist, d.h. dass $\lim_{n\to\infty}\int_0^n \sin(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.

Lösung: Es ist klar, dass f sprungstetig auf jedem Intervall $[0,b]$ ist, da f monoton ist. Damit ist g als Produkt sprungstetiger Funktionen ebenfalls sprungstetig.

Wir teilen das Integral in Intervalle, auf denen die Sinusfunktion keinen Vorzeichenwechsel hat. Das heißt, wir definieren $a_k := \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin(x)f(x)\,dx$. Dann gilt $a_k\geq 0$ für k gerade und $a_k\leq 0$ für k ungerade. Weiter gilt

$$|a_k| = \left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin(x)f(x)\,dx\right| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin(x)|f(x)\,dx$$

Da $|\sin(x)|f(x) = |\sin(x+\pi)|f(x) \geq |\sin(x+\pi)|f(x+\pi)$ und damit ist $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend. Außerdem gilt unter zu Hilfenahme der obigen Ungleichung

$$|a_k| \leq \pi f(k\pi) \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

Also folgt mit dem Leibniz Kriterium für Reihen, dass $\sum_{k=0}^\infty a_k$ gegen ein $a\in\mathbb{R}$ konvergiert.

Wir zeigen nun, dass das uneigentliche Integral den Wert a hat.

Es sei $\varepsilon>0$. Da die Reihe konvergent ist, gibt es ein $K\in\mathbb{N}$ mit

$$\left|\sum_{k=0}^n a_k - a\right| \leq \varepsilon/2$$

für alle $n\geq K$. Es sei nun $R_1=K\pi$. Weiter gibt es ein $R_2>0$ mit $f(x)<\frac{\varepsilon}{2\pi}$ für alle $x\geq R_2$. Es sei nun $R>\max\{R_1,R_2\}+\pi$. Dann gibt es ein $N\in\mathbb{N}$, so dass $N\pi\leq R\leq(N+1)\pi$ und damit gilt

$$\left|\int_0^R \sin(x)f(x)\,dx - a\right| = \left|\sum_{k=0}^N a_k + \int_{N\pi}^R \sin(x)f(x)\,dx - a\right| \leq \varepsilon/2+\pi f(N\pi) < \varepsilon.$$

Dies beendet den Beweis.