Analysis II für M, LaG/M, Ph
1. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
22.10.2010

Aufgaben

Aufgabe T1.1

(a) Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{K}$ eine Treppenfunktion und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass die Funktion λf auch eine Treppenfunktion ist und $\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.

(b) Sei $Z_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ eine Zerlegung des Intervalls $I = [a,b]$. Seien $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ und eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}$ gegeben, sodass $f(x) = c_i$ für alle $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Für jede Zerlegung $Z_2 = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$ des Intervalls $[a,b]$, für die $Z_1 \subseteq Z_2$ gilt, bestimme man $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{K}$, sodass $f(x) = d_j$ für alle $x \in (y_{j-1}, y_j)$.

Hinweis. Zeigen Sie erstes, dass für jedes $j = 1, \ldots, m$ ein einziges $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $[y_{j-1}, y_j] \subseteq [x_{i-1}, x_i]$. Daraus kann man d_j bestimmen.

(c) Seien $f, g : I = [a,b] \to \mathbb{K}$ Treppenfunktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion $f + g$ auch Treppenfunktion ist und

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g.$$

Hinweis. Zeigen Sie, dass es eine gemeinsame Zerlegung $Z = \{a = z_0 < z_1 < \cdots < z_N = b\}$ des Intervalls $[a,b]$ und $a_1, \ldots, a_N$, $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{K}$ gibt, sodass $f(x) = a_k$ und $g(x) = b_k$ für alle $x \in (z_{k-1}, z_k)$.

(d) Seien $f, g : I \to \mathbb{K}$ Treppenfunktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\lambda f + \mu g$ auch Treppenfunktion ist und

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

(e) Es seien $f, g : I \to \mathbb{K}$ sprungstetige Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

(f) Zeigen Sie, dass es für jede Treppenfunktion $f : I \to \mathbb{K}$ die Funktion $|f|$ auch Treppenfunktion ist und

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

gilt.

Lösung:

(a) Nach Definition 30.1 gibt es eine Zerlegung $Z = \{a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b\}$ des Intervalls $[a,b]$, sodass die Funktion f auf jedem Intervall (x_{i-1}, x_i) konstant ist. Das heißt, dass es für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ ein c_i gibt, sodass $f(x) = c_i$ für alle $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Also

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{(x_{i-1}, x_i)}(x)$$

für alle $x \in [a,b] \setminus Z$.

Man erhält, dass die Funktion λf auf jedem Intervall (x_{i-1}, x_i) auch konstant ist und inbesondere $\lambda f(x) = \lambda c_i$ für alle $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Also

$$\lambda f(x) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda c_i) \mathbf{1}_{(x_{i-1}, x_i)}(x)$$

für alle $x \in [a,b] \setminus Z$. Somit ist λf eine Treppenfunktion und weiterhin gilt nach Definition 30.3:

$$\int_I \lambda f = \sum_{i=1}^{n} (\lambda c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \lambda \cdot \int_I f.$$

(b) Da $Z_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ eine Zerlegung des Intervalls $I = [a,b]$ ist, gehört y_{j-1} zu einem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ für jedes $j = 1, 2, \ldots, m$. Also $x_{i-1} \leq y_{j-1} < y_j$. Die Zahl y_j ist (nach Definition) das kleinste Element y von Z_2, sodass $y_{j-1} < y$. Da $x_i \in Z_1 \subseteq Z_2$ und $y_{j-1} < x_i$, kann x_i nicht kleiner als y_j sein. Somit $y_j \leq x_i$, also $x_{i-1} \leq y_{j-1} < y_j \leq x_i$. Das bedeutet $[y_{j-1}, y_j] \subseteq [x_{i-1}, x_i]$. Weiterhin ist dieses i die einzige Natürliche Zahl k sodass $[y_{j-1}, y_j] \subseteq [x_{k-1}, x_k]$, weil andererseits der Schnitt $[x_{i-1}, x_i] \cap [x_{k-1}, x_k]$ das ganze Intervall $[y_{j-1}, y_j]$ umfassen würde. Aber der Schnitt zweier ungleicher Intervalle, deren Grenzen zu der gleichen Zerlegung gehören, enthält höchstens ein Element. Also ist dieses i das einzige.

Da $f(x) = c_i$ für alle $x \in (x_{i-i}, x_i)$, muss d_j gleich c_i sein. Also definieren wir $d_j = c_i$; wobei i die einzige natürliche Zahl ist, sodass $[y_{j-1}, y_j] \subseteq [x_{i-1}, x_i]$. Es folgt, dass $f(x) = d_j$ für alle $x \in (y_{j-1}, y_j)$.

(c) Da f und g Treppenfunktionen sind, gibt es zwei Zerlegungen $Z_f = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, $Z_g = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$ des Intervalls $[a,b]$ und $c_1, \ldots, c_n$, $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{K}$, sodass $f(x) = c_i$ für alle $x \in (x_{i-1}, x_i)$ und $g(x) = d_j$ für alle $x \in (y_{j-1}, y_j)$.

Mann betrachte die Zerlegung $Z = Z_1 \cup Z_2 = \{a = z_0 < z_1 < \cdots < z_N = b\}$. Nach (b) (angewendet auf f und g) gibt es $a_1, \ldots, a_N$, $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{K}$, sodass $f(x) = a_k$ und $g(x) = b_k$ für alle $x \in (z_{k-1}, z_k)$.

Wir definieren $e_k = a_k + b_k$ und es ist klar, dass $(f+g)(x) = e_k$ für alle $x \in (z_{k-1}, z_k)$. Deshalb ist die Funktion $f + g$ Treppenfunktion. Nach der Definition des Integrals gilt

$$\int_I f + g = \sum_{k=1}^{N} e_k \cdot (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot (z_k - z_{k-1}) + \sum_{k=1}^{N} b_k \cdot (z_k - z_{k-1}) = \int_I f + \int_I g.$$

(d) Das folgt nach (a) und (c).

(e) Nach Theorem 30.13, gibt es zwei Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf I, die gleichmäßig jeweils gegen f und g konvergieren. Nach Definition 30.16 gilt $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$ und $\int_I g = \lim_{n\to\infty} \int_I g_n$. Nach (d) ist die Funktion $\lambda f_n + \mu g_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Treppenfunktion und es ist klar, dass die Folge $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\lambda f + \mu g$ konvergiert. Nach Definition 30.16 gilt $\int_I (\lambda f + \mu g) = \lim_{n\to\infty} \int_I (\lambda f_n + \mu g_n)$.

Man erhält

$$\begin{aligned}
\int_I (\lambda f + \mu g) &= \lim_{n\to\infty} \int_I (\lambda f_n + \mu g_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\lambda \int_I f_n + \mu \int_I g_n) \qquad \text{(nach (d))} \\
&= \lambda \lim_{n\to\infty} \int_I f_n + \mu \lim_{n\to\infty} \int_I g_n \\
&= \lambda \int_I f + \mu \int_I g.
\end{aligned}$$

(f) Sei eine Zerlegung $Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, sodass $f(x) = c_i$ für alle $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Es folgt, dass $|f(x)| = |c_i|$ für alle $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Deshalb ist $|f|$ Treppenfunktion. Nach der Definition gilt

$$|\int_I f| = |\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{j-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i| \cdot |(x_i - x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |c_i| \cdot (x_i - x_{i-1}) = \int_I |f|.$$

⊣

Aufgabe T1.2 (Lemma 30.11)

(a) Sei eine Menge $A \neq \emptyset$ und eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$, die nicht beschränkt ist. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ gibt, sodass $|f(x_n)| \to \infty$.

(b) Sei eine Menge $A \neq \emptyset$ und eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$, die nicht beschränkt ist. Zeigen Sie, dass es eine monotone Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ gibt, sodass $|f(y_n)| \to \infty$.

Hinweis. Benutzen Sie Lemma 10.8.

(c) Sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die nicht beschränkt ist. Zeigen Sie, dass es eine monotone Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [a, b]$ und ein $x_0 \in [a, b]$ gibt, sodass $x_n \to x_0$ und $|f(x_n)| \to \infty$.

(d) Sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die nicht beschränkt ist. Zeigen Sie, dass f nicht sprungstetig ist. Also ist jede sprungstetige Funktion beschränkt.

Lösung:

(a) Da f nicht beschränkt ist, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in A$, sodass $|f(x_n)| \geq n$. Also gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, sodass $|f(x_n)| \to \infty$.

(b) Sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von (a). Nach Lemma 10.8 gibt es eine Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, die monoton ist. Da $|f(x_n)| \to \infty$, folgt $|f(x_{k_n})| \to \infty$. Wir nehmen $y_n = x_{k_n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(c) Nach (b) gibt es eine monotone Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [a, b]$, sodass $|f(x_n)| \to \infty$. Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsende ist, definieren wir $x_0 = \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ und falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallende ist, definieren wir $x_0 = \inf\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. Auf jedem Fall gilt $x_n \to x_0$, weil die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist. (Das ist der Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß.) Da für jedes $n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_n \leq b$, folgt $a \leq x_0 \leq b$.

(d) Da f nicht beschränkt ist, folgt nach (c), dass es eine monotone Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [a, b]$ und ein $x_0 \in [a, b]$ gibt, sodass $x_n \to x_0$ und $|f(x_n)| \to \infty$. Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsende ist, folgt, dass die linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ nicht zu $\mathbb{R}$ existiert. (Andererseits würde $\lim\limits_{x\to x_0^-} |f(x)| \in \mathbb{R}$ gelten. Also würde auch $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| \in \mathbb{R}$ gelten.) Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallende ist, folgt, dass die rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ nicht zu $\mathbb{R}$ existiert. Auf jedem Fall, ist die Funktion f nicht sprungstetig.

⊣