Analysis II für M, LaG/M, Ph
15. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
18.02.2011

Gruppenübung

Aufgabe G15.1

(a) Zeigen Sie, dass die Einheitskugel als grüner Bereich (S, V) des Raumes verstanden werden kann.

(b) Sei $H = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ und $\psi(\theta, \varphi)$ die (Physiker)-Kugelkoordinaten. Ist (ψ, H) eine grüne Parametrisierung von (S, V)?

(c) Sei F auf V stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\int_{(\psi,H)^\perp} F = \int_V \mathrm{div} F.$$

Aufgabe G15.2

(a) Sei V ein Torus(volumen). Zeigen Sie, dass es einen grünen Bereich (S, V) gibt.

(b) Bestimmen Sie die Flächeninhalte F der Tori S.

Aufgabe G15.3

Bzgl, eines pos.or. ON-Koordinatensystems α des Raumes betrachten wir

$$C = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } x + y + z \geq 1\}.$$

(a) Welche Voraussetzungen für K und ϕ mit $C = \phi(K)$ müssen erfüllt sein, damit man den Satz von Stokes auf (ϕ, K) anwenden kann?

(b) Bestimmen Sie solche K und ϕ.

(c) Bestimmen Sie die Werte der zugehörigen Integrale aus dem Satz von Stokes für $\vec{F}$ die Identität bzw. $\vec{F}$ die 90^o-Drehung um die Achse $\vec{a}$ mit Koordinaten $\vec{a}^\alpha = (1, 1, 1)^t$.

(d) Sei nun K die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und auf K definiert

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\vec{F} = \mathrm{grad} f$. Bestimmen Sie einen C^1-Weg Γ, dessen Spur der Rand von $\phi(K)$ ist und das Wegintegral

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$