Analysis II für M, LaG/M, Ph
14. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
11.02.2011

Gruppenübung

Aufgabe G14.1
Gegeben die folgende Parametrisierung einer Fläche des Raumes

$$\phi : (u, v) \mapsto (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v), \quad 0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le \frac{\pi}{2},$$

bestimmen Sie die Spur$(\phi, [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}])$. Bestimmen Sie die normalen Einheitsvektoren $n_\phi(u, v)$ für alle $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

Aufgabe G14.2 (Gesetz von Faraday)
Seien (Γ, K) ein grüner Bereich der Ebene, G öffnen mit $K \subseteq G$ und $\phi : G \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Ferner sei $E(t, x, y, z)$ das elektrisches Feld und $H(t, x, y, z)$ das Magnetfeld am Punkt (x, y, z) im Augenblick t, wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $t \ge 0$. Gegeben, dass die Funktionen E und F C^1 sind, zeigen Sie das Gesetz von Faraday

$$\int_{\phi\circ\Gamma} E(x, y, z, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\frac{\partial}{\partial t}\int_K H(\phi(u), t) \cdot N_\phi(u)$$

für alle $t \ge 0$.
Hinweis. Nach einem Gesetz der Theorie vom Elektromagnetismus gilt $\mathrm{rot}E(x, y, z, t) = -\frac{\partial H}{\partial t}(x, y, z, t)$.

Aufgabe G14.3
Gegeben das Vektorfeld $F(x, y, z) = (2x, y^2, z^2)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, und die Kugel $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ bestimmen Sie das Integral $\int_V \mathrm{div}F$.

Hausübung

Aufgabe H14.1 (6 Punkte)
Gegeben die folgende Parametrisierung einer Fläche des Raumes

$$\phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u), \quad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 2\pi,$$

bestimmen Sie die Spur($\phi, [0,1] \times [0,2\pi]$). Bestimmen Sie den Normalenvektor $N_\phi(0,0)$.

Aufgabe H14.2 (6 Punkte)
Sei $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$, $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $\phi : K \to \mathbb{R}^3 : \phi(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$, und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (x,y,z)$. Welche Spur hat die Parametrisierung (ϕ, K)? Verifizieren Sie den Satz von Stokes für die Parametrisierung (ϕ, K) und für den grünen Bereich (γ, K), d.h. zeigen Sie, dass

$$\int_K \mathrm{rot} F(\phi(u)) \cdot N_\phi(u) = \int_{\phi\circ\gamma} F \, \mathrm{d}\vec{x}.$$

Aufgabe H14.3 (6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : f(x,y,z) = x^2 + y + z$ und $n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : n(x,y,z) = (x,y,z)$.

(a) Bestimmen Sie ein Vektorfeld $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $f(x,y,z) = F(x,y,z) \cdot n(x,y,z)$, für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie das Integral $\int_V \mathrm{div} F$, wobei F das Vektorfeld aus (a) ist, das Sie bestimmt haben und $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.

(c) Sei das Vektorfeld F aus (a), das Sie bestimmt haben. Betrachten Sie die folgende Parametrisierung:

$$\phi : [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R} : \phi(u,v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v).$$

Bestimmen Sie das Integral

$$I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\phi(u,v)) \cdot n(\phi(u,v)) \cdot |N_\phi(u,v)| \mathrm{d}u \mathrm{d}v,$$

wobei $N_\phi(u,v)$ der Normalenvektor im (u,v) ist.

Hinweis. Der Normalenvektor wird in G14.1 bestimmt; nach (a) folgt $F \cdot n = f$; es gilt $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ und

$$\int \sin^3 x \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \cos^3 x - \cos x.$$

Aufgabe H14.4 (12 Punkte)
Zeigen Sie, dass man die Einheitssphäre mit ihrem Volumen als grüner Bereich verstehen kann.