Analysis II für M, LaG/M, Ph
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
4.2.2011

Gruppenübung

Aufgabe G13.1
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche A, die von den Kurven

$$X_1(t) = (t, \frac{4}{3\pi}t)^T, t \in [0, 3\pi], \quad X_2(t) = (t, 4 + \sin(t))^T, t \in [0, 3\pi],$$
$$X_3(t) = (0, t)^T, \quad t \in [0, 4]$$

eingeschlossen wird. Verwenden Sie hierzu den Satz von Gauß in der Ebene. Fertigen Sie auch eine Skizze an.

Aufgabe G13.2
Es sei $a > 0$. Durch die Menge $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)\}$ ist implizit eine Kurve definiert, die Lemniskate. Die beiden "Flügel" lassen sich parametrisieren durch

$$z_1(t) = a \begin{pmatrix} \sqrt{\cos(2t)}\cos(t) \\ \sqrt{\cos(2t)}\sin(t) \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$$

bzw.

$$z_2(t) = a \begin{pmatrix} \sqrt{\cos(2t)}\cos(t) \\ \sqrt{\cos(2t)}\sin(t) \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$$

(a) Skizzieren Sie die Lemniskate

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes den Flächeninhalt der Fläche, die von der Lemniskate berandet wird. Betrachten Sie hierzu die Funktion $f(x, y) = (x, 0)$.

Aufgabe G13.3
Es sei G das Gebiet, das zwischen den Kurven $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ und $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 4\}$ liegt. Berechnen Sie mit dem Satz von Green das Kurvenintegral

$$\int_{\partial G} (e^x - y)\,dx + (\sin y + x)\,dy.$$

Hausübung

Aufgabe H13.1 (6 Punkte)
Sei $R > 0$ und

$$B_R = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le R, \frac{1}{x} \le y \le \sqrt{x} \right\}.$$

Skizzieren Sie B_R und berechen Sie den Flächeninhalt von B_R einmal direkt und einmal mit Hilfe des Gaußschen Satzes in der Ebene.

Aufgabe H13.2 (6 Punkte)
Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein grüner Bereich. Die Funktionen h und g seien reellwertig und zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von G.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\partial G} g \nabla h \cdot \vec{n} - h \nabla g \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}s = \int_G g \Delta h - h \Delta g \, \mathrm{d}(x, y).$$

Hierbei bezeichnet $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ den Laplaceoperator und $\vec{n}$ die äußere Normale an G.

(b) Zeigen Sie: Ist g harmonisch, d.h. $\Delta g = 0$ so gilt

$$\int_{\partial G} \nabla g \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}s = 0$$

Aufgabe H13.3 (6 Punkte)
Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds v mit $v(x, y) = (x^3, 0)$ durch den Rand des Kreises K um den Ursprung mit Radius 2. Bestimmen Sie also

$$\int_{\partial K} v \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}s.$$

Berechnen Sie einmal das Integral direkt und einmal unter Verwendung des Gaußschen Satzes.