Analysis II für M, LaG/M, Ph
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
28.1.2011

Gruppenübung

Aufgabe G12.1
Berechnen Sie das Gebietsintegral

$$\iint_G \sin(x-y)\, dG,$$

wobei G das Dreieck mit den Rändern $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$ und $x + y = 0$ ist.

Aufgabe G12.2

(a) Es sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ und $f : B \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_B f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$$

durch geeignete "krumme" Zerlegungen des Integrationsgebietes und passende Treppenfunktionen.
Hinweis: Die Funktion f hängt nur vom Abstand von (x, y) zum Nullpunkt ab. Es gelten die Formeln

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)n.$$

(b) Es seien $a, b > 0$. Berechnen Sie das Volumen der Ellipse $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 < 1\}$, indem Sie die Substitution für den Einheitskreis, gegeben durch σ mit $\sigma(x, y) := (ax, by)$, $\tau \equiv ab$ und der Zerlegung Z_n aus Teil (a), verwenden.

Aufgabe G12.3 (**Masse und Schwerpunkt**)
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kegel mit einem Kreis in der x_1-x_2-Ebene um den Nullpunkt und mit Radius R als Grundfläche. Die Spitze des Kegels befinde sich im Punkt $(0, 0, h)$. Der Kegel sei mit einer Masse gefüllt, deren Dichte $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $\rho(x_1, x_2, x_3) = x_3$ gegeben ist. Bestimmen Sie

(a) die durch

$$M := \int_K \rho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3)$$

gegebene Masse des Kegels,

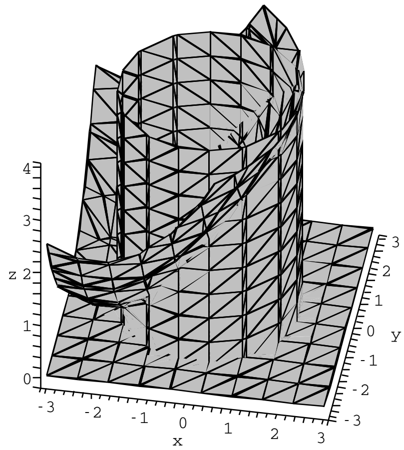
(b) den Schwerpunkt $S = (S_1, S_2, S_3)$ des Kegels, dessen Koordinaten durch

$$S_j := \frac{1}{M}\int_K x_j \rho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3)$$

für $j = 1, 2, 3$ gegeben sind.

Hausübung

Aufgabe H12.1 (6 Punkte)
Bestimmen Sie das Volumen, welches innerhalb des Zylinders $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, über der Ebene $z = 0$ und unterhalb des durch die Gleichung $(x+2)^2 + y^2 = 4z$ gegebenen Paraboloids liegt.



Aufgabe H12.2 (6 Punkte)
Berechnen Sie das Volumen des Raumstückes, welches den beiden Zylindern $x^2 + y^2 \leq 1$ und $x^2 + z^2 \leq 1$ gemeinsam ist.

Aufgabe H12.3 (6 Punkte)
Gegeben seien $G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x,y,z \geq 0,\ x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \leq 1\}$ und die Funktion $f(x,y,z) = x$.

(a) Bestimmen Sie das Volumen $V(G)$ des Gebietes G.

(b) Berechnen Sie das Gebietsintegral

$$\iint_G f(x,y,z)\, dG.$$