

Analysis II für M, LaG/M, Ph

11. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
21.01.2011

Gruppenübung

Aufgabe G11.1

Sei I ein abgeschlossenen Intervall. Zeigen Sie durch die Benutzung des Summationstheorem (Theorem 23.9), dass

$$\int_a^b 2x dx = b^2 - a^2 \text{ für alle } a \leq b \text{ mit } [a, b] \subseteq I.$$

Hinweis. Betrachten Sie die Funktionen $f(x) = 2x$, $x \in I$ und $W([a, b]) = b^2 - a^2$ für $a \leq b$ mit $[a, b] \subseteq I$.

Aufgabe G11.2

Wir betrachten die Funktion $f : I = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = x + y$.

- Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung Z_n von I in n^2 Teilintervalle an.
- Geben Sie zur Zerlegung Z_n zwei Treppenfunktionen $\underline{f}_n, \bar{f}_n$ mit $\underline{f}_n \leq f \leq \bar{f}_n$ an.
- Benutzen Sie die Treppenfunktionen aus (b) um zu zeigen, dass f auf I Riemannintegrierbar ist.

Aufgabe G11.3

Bestimmen Sie die folgende Integrale.

(a) $I_1 = \int_S \cos x \sin y d(x, y)$, wobei $S = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) $I_2 = \int_R x^4 y + y^2 d(x, y)$, wobei $R = [-1, 1] \times [0, 1]$.

Aufgabe G11.4

Bestimmen Sie die Extrema von der Funktion f , die so definiert ist: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = 4x^2 - 3xy$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Hausübung

Aufgabe H11.1 (6 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} : & f(x, y) &= xy, \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} : & g(x, y) &= x^2 + 4y^2 - 2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

Aufgabe H11.2 (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : I = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y, z) = xy + z$. Bestimmen Sie Treppenfunktionen $\underline{f}_n, \bar{f}_n$ für jedes n mit $\underline{f}_n \leq f \leq \bar{f}_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I (\bar{f}_n - \underline{f}_n) d(x, y) = 0$.

Aufgabe H11.3 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die folgende Integrale.

- (a) $J_1 = \int_S (y \cos x + 2) d(x, y)$, wobei $S = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$.
- (b) $J_2 = \int_R x^2 + y^2 d(x, y)$, wobei $R = [-1, 1] \times [0, 1]$.