Analysis II für M, LaG/M, Ph
10. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
14.1.2010

Gruppenübung

Aufgabe G10.1
Berechnen Sie die Kurvenlänge der folgenden Kurven

(a) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (r\cos t, r\sin t, ct)$, wobei $r, c > 0$.

(b) $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$

Aufgabe G10.2

(a) Wir betrachten die Drehung eines starren Körpers um die e_3-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Das heißt, der Winkel φ der Drehung wächst linear mit der Zeit t, d.h. $\varphi(t) = \omega t$. Jeder Punkt $x = x(0)$ durchläuft also die Bahn

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(0)$$

i. Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor eines Partikels, der in $x(0)$ startet, zum Zeitpunkt $t > 0$, also $v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} x(t)$.

ii. Das Geschwindigkeitsfeld ist gegeben durch $v = \omega(-x_2, x_1, 0)^T$. Berechnen Sie $\operatorname{rot} v$.

(b) Es seien $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

i. $\operatorname{rot}(h \cdot F) = h \cdot \operatorname{rot} F - F \times \nabla h$;

ii. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) = \nabla(\operatorname{div} F) - \Delta F$.

Aufgabe G10.3
Es seien $a, b > 0$ und

$$M_{a,b} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Hausübung

Aufgabe H10.1 (6 Punkte)
Betrachten Sie die Kurve

$$X : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2,\ X(t) = (t^2, t^3).$$

(a) Skizzieren Sie die Bahn der Kurve.

(b) In welchen Punkten $X(t)$ gilt $X'(t) \neq (0, 0)$?

(c) Berechnen Sie die Länge der Kurve X.

Aufgabe H10.2 (6 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y,z) = (x^2 + xy - y - z, 2x^2 + 3xy - 2y - 3z)$. Zeigen Sie, dass $M = f^{-1}(0)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie den Tangentialraum T_0M.

Aufgabe H10.3 (6 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend und $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie:
Ist $\int_\gamma F(x)dx$ wegunabhängig, dann ist F ein Gradientenfeld, d.h. es existiert eine Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $F = \nabla\varphi$.