Analysis II für M, LaG/M, Ph
9. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
17.12.2010

Gruppenübung

Aufgabe G9.1
Wir betrachten die Menge $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ and $(x_0, y_0) \in A$. Bestimmen Sie (x_0, y_0), für die eine offene Menge W und eine differenzierbare Funktion $\varphi : W \to \mathbb{R}$ existieren mit $x_0 \in W$, $\varphi(x_0) = y_0$ und $(x, \varphi(x)) \in A$ für alle $x \in W$.

Aufgabe G9.2
Zeigen Sie, dass eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^2$ und differenzierbare Funktionen $u \equiv u(x,y)$, $v \equiv v(x,y)$, die auf W definiert sind, gibt mit $(1,1) \in W$, $u(1,1) = v(1,1) = 1$ und das folgende System von Gleichungen gilt

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2, \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die partielle Ableitung $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,1)$.

Aufgabe G9.3
Wir betrachten das Vektorfeld

$$f(x,y) = (2xy, x^2 + 2y).$$

(a) Bestimmen Sie ein Potential F von f.

(b) Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma$ von f, wobei

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad 0 \le t \le 1,$$

unter Verwendung der folgenden zwei Arten: (I) der Definition des Kurvenintegrals, (II) der Übung G.9.3-(a).

Hausübung

Aufgabe H9.1 (6 Punkte)
Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die so definiert ist:

$$F(x,y,z) = z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1.$$

Man zeige, dass durch $F(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung von $(x,y) = (1,1)$ eine differenzierbare Funktion $z = \varphi(x,y)$ mit $\varphi(1,1) = 1$ implizit definiert ist und berechne die partielle Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ im Punkt $(1,1)$.

Aufgabe H9.2 (6 Punkte)
Wir betrachten die Menge

$$A \quad = \quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ z^2 + 2xy - 1 = 0\}, B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ z^2 + x^2 - y^2 + xy - 20 = 0\}$$

und einen Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in A \cap B$ mit $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}$ mit $z_0 \in W$ gibt und differenzierbare Funktionen $f, g : W \to \mathbb{R}$ mit $f(z_0) = x_0$, $g(z_0) = y_0$ gibt, sodass $(f(z), g(z), z) \in A \cap B$ für alle $z \in W$.

(b) Zeigen Sie (für die f, g, W von (a)), dass

$$2f(z)f'(z) - 2g(z)g'(z) + z = 0,$$

für alle $z \in W$.

Hinweis. Benutzen Sie den Satz über implizite Funktionen über eine Funktion $F(z,x,y) = (F_1(z,x,y), F_2(z,x,y))$. Wir betrachten x und y als Funktionen von z.

Aufgabe H9.3 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Integral $\int_{\gamma_1} \cos z \mathrm{d}x + e^x \mathrm{d}y + e^y \mathrm{d}z$; wobei $\gamma_1(t) = (1, t, e^t)$, $0 \leq t \leq 2$.

[d.h. $F_1(x,y,z) = (\cos z, e^x, e^y)$ und $\int_{\gamma_1} \cos z \mathrm{d}x + e^x \mathrm{d}y + e^y \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} F_1 \mathrm{d}\gamma_1$.]

(b) Bestimmen Sie ein Potential F von $f(x,y) = (y \cos x, \sin x + 3y^2)$, $x, y \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f \, \mathrm{d}\gamma$, wobei $\gamma(t) = (t, \cos t)$, $t \in [0, \pi]$.