Analysis II für M, LaG/M, Ph
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
10.12.2010

Gruppenübung

Hinweis: Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det A = ad - bc \neq 0$, so ist die Inverse von A gegeben durch $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Insbesondere ist A invertierbar genau dann, wenn $\det A \neq 0$ gilt.

Aufgabe G8.1
Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2 - xz^2 + y^3 + z^2 - 3y$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

(a) Bestimmen Sie die Gradienten von f und g.

(b) Bestimmen Sie die Hessematrizen H_f und H_g.

(c) Ist H_f in $(1,-1,2)$, bzw. H_g in $(0,0)$ positiv definit, indefinit oder negativ definit?

(d) Hat die Funktion f an der Stelle $(1,-1,2)$, bzw g in $(0,0)$ ein Extremum?

Aufgabe G8.2
Bestimmen Sie das globale Maximum und das globale Minimum der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2x^2 + xy + \frac{5}{4}y^2 - 2x - 2y$$

auf dem Quadrat $S = [0,1] \times [0,1]$.

Aufgabe G8.3
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := (x^3 + xy + 1,\ x + y + y^3 + 1).$$

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung des Punktes $(1,1)$ gibt, die durch f bijektiv auf eine Umgebung des Punktes $(3,4)$ abgebildet wird, und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von f im Punkt $(3,4)$.

Hausübung

Aufgabe H8.1 (6 Punkte)

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 - y^2$. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen der Gradient von f verschwindet. Gibt es relative Extremstellen von f?

(b) Es sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = x^4 + y^2 - 2$. Bestimmen Sie alle Stellen, in denen g ein relatives Extremum hat.

Aufgabe H8.2 (6 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2).$$

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion f, und entscheiden Sie, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

Aufgabe H8.3 (6 Punkte)
Zeige, dass die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

für jedes $(x,y) \neq (0,0)$ lokal umkehrbar ist. Ist F auch global umkehrbar? Bestimme das Urbild $F^{-1}(\{(a,b)\})$ eines beliebigen Punktes $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.