Analysis II für M, LaG/M, Ph
7. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
03.12.2010

Gruppenübung

Aufgabe G7.1
Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\cos x\sin y\exp(z)$. Bestimmen Sie das 3-te Taylorpolynom von f in $(0,0,0)$ unter Verwendung der folgenden zwei Arten:

(a) durch den Satz von Langrange-Taylor;

(b) durch das Multiplizieren der Potenzreihen von den Funktionen $\exp(z),\cos x,\sin y$.

Aufgabe G7.2
Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ betrachten wir das n-te Polynom $T_p^n f(x,y)$ von f in $(0,0)$.

(a) Bestimmen Sie das 2-te Taylor Polynom $T_p^2 f(x,y)$ von f in $(0,0)$.

(b) Sein ein Konstant $c>0$, sodass $\max\{|f_{xx}(u)|,|f_{yy}(u)|,|f_{xy}(u)|\}\leq c$, für alle $|u|\leq 0.1$. Zeigen Sie, dass der Abstand zwischen $f(0.1,0.1)$ und $T_p^1 f(0.1,0.1)$ kleiner oder gleich als $2c\cdot(0.1)^2$ ist.

Aufgabe G7.3
Sei eine differenzierbare Funktion $f:D=\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, für die $f'(x,y)=(5,0)$ gilt für alle $x,y\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein Konstant $c\in\mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x,y)=5x+c$$

für alle $x,y\in\mathbb{R}$.

Hausübung

Aufgabe H7.1 (6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x \cdot \exp(\cos y)$. Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom von f in $(0,0)$ unter Verwendung der folgenden zwei Arten:

(a) durch den Satz von Langrange-Taylor;

(b) durch die Komposition der Potenzreihen von den Funktionen $\exp(x), \cos x$.

Hinweis für (b). Bestimmen Sie erstes ein Polynom $q(y)$, sodass $\cos y \approx q(y)$ und dann betrachten Sie die Funktion $\exp(q(y))$.

Aufgabe H7.2 (6 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = \cos(2x+3y)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das n-te Polynom $T_p^n f(x,y)$ von f in $(0,0)$.

(a) Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom $T_p^2 f(x,y)$ von f in $(0,0)$.

(b) Bestimmen Sie die partielle Ableitungen f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} auf jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Zeigen Sie (ohne die Benutzung eines Rechners), dass der Abstand zwischen $f(0.1, 0.1)$ und $T_p^1 f(0.1, 0.1)$ kleiner oder gleich als 0.125 ist.

Aufgabe H7.3 (6 Punkte)
Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass $f(0,0) = 0$ und $f'(x,y) = (x \;\; y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ein $\tau \in [0,1]$ gibt, sodass

$$f(x,y) = \tau \cdot (x^2 + y^2).$$