Analysis II für M, LaG/M, Ph
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
26.11.2010

Gruppenübung

Aufgabe G6.1

(a) Gegeben seien die Matritzen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Produkte AB, BA, A^2, B^2 wann immer diese definiert sind.

(b) In $\mathbb{R}^2$ beschreibe die lineare Abbildung A die Spiegelung an der Geraden $\{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$. Geben sie die Abbildungsmatrizen von A bezüglich der Standardbasis und der Basis $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ an. Hierbei sind im Definitionsbereich und im Wertebereich die selben Basen zu wählen, wer möchte kann natürlich alle Kombinationen diskutieren.

Aufgabe G6.2

In einem 2-dimensionalen Vektorraum X seien die beiden Basen $\alpha : \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2$ und $\beta : w_1, w_2$ gegeben. Weiter gelte die Beziehung $w_j = w_{1j}\mathsf{v}_1 + w_{2j}\mathsf{v}_2$, wobei

$$T := \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a) Es sei $x = x^{\beta_1} w_1 + x^{\beta_2} w_2$, $(x^{\beta_1}, x^{\beta_2}) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2} \in \mathbb{R}$, so dass $x = x^{\alpha_1}\mathsf{v}_1 + x^{\alpha_2}\mathsf{v}_2$.

(Sie bestimmen hier also zu gegebener Koordinatenspalte $(x^{\beta_1}, x^{\beta_2})^T$ von x bezüglich β eine Koordinatenspalte von x bezüglich α.)

(b) Wir betrachten die Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2}$, falls $x = x^{\alpha_1}\mathsf{v}_1 + x^{\alpha_2}\mathsf{v}_2$. Die Abbildungsmatrix von f (f ist linear!) bezüglich α ist also gegeben durch $f_\alpha = (a_1 \quad a_2)$.

Bestimmen Sie nun $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = b_1 y_1 + b_2 y_2$, falls $x = x^{\beta_1} w_1 + x^{\beta_2} w_2$ und stellen Sie $f(x)$ als Produkt der Matrizen f_α, T, T^{-1} dar.

Aufgabe G6.3

Es sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von A an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(b) Nach (a) gilt für $f(x) = x$ also $f = Id$, dass $Df(x) = Id$. Ist $n = m = 1$, so schrieb man in Analysis I: $f'(x) = 1$. Diskutieren Sie diese scheinbare Inkonsistenz.

Hausübung

Aufgabe H6.1 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Jakobimatrizen der folgenden Funktionen

i. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (\log(1+x^2+z^2), z^2+y^2-x^2, \sin(xz))$

ii. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (xy, \cosh(xy), e^{x^2})$

(b) Es sei X ein zweidimensionaler reeller Vektorraum und $E = \{e_1, e_2\}$ eine Basis. Weiter sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \sin \alpha_1.$$

i. Berechnen Sie die Jakobimatrix von h bezüglich E.

ii. Es sei $b_1 = e_1 - e_2$ und $b_2 = 2e_2$. Berechnen Sie die Jakobimatrix von h bezüglich der Basis $\{b_1, b_2\}$.

Aufgabe H6.2 (6 Punkte)

Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine bilineare Funktion. Das heißt, für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\beta(x,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\beta(\cdot,x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung.

(a) Berechnen Sie die Ableitung $d\beta$ von β.

(b) Beweisen sie, daß $d\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine lineare Abbildung ist. (Hier bezeichnet $\mathscr{L}(X,Y)$ die Menge aller linearen Abbildungen zwischen den Vektorräumen X und Y.

(c) Ist β stetig differenzierbar?

Aufgabe H6.3 (6 Punkte)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt positiv homogen vom Grade $\alpha \in \mathbb{R}$, falls

$$f(tx) = t^\alpha f(x),\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ t > 0.$$

(a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f genau dann homogen vom Grade α, wenn die Eulersche Relation

$$\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x),\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

gilt.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen F und h, wobei $F, h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $F(t) := f(tx)$ und $h(t) = t^{-\alpha} f(tx)$ gegeben sind. Verwenden Sie dann die Kettenregel.

(b) Es sei f positiv homogen vom Grade 1 und in $\mathbb{R}^n$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass f linear ist.