# Analysis II für M, LaG/M, Ph
# 5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
19.11.2010

## Gruppenübung

**Aufgabe G5.1**

(a) Beweisen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: f(x,y)=x\cdot y$ gleich $(y\ \ x)$ ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion: $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: g(x,y)=e^{x\cdot y}$.

(c) Gegeben seien die Funktion $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}: f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und der Vektor $u=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$. Berechnen Sie die Richtungsableitung $\mathrm{d}_u f(3,2,1)$.

**Aufgabe G5.2**

Sei eine differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ und $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Die Gleichung der Tangentialebene von der Fläche $z=f(x,y)$ an der Stelle $(x_0,y_0)$ ist so definiert:

$$z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0).$$

Bestimmen Sie die Gleichung und einen Normalenvektor der Tangentialebene der Fläche $z=f(x,y)$ an der Stelle $(1,1)$, wenn $f(x,y)=5x^2+y^3$, $x,y\in\mathbb{R}$.

**Aufgabe G5.3**

Wir betrachten die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, die so definiert ist: $f(x,y)=\frac{y^3}{x^2+y^2}$, wenn $(x,y)\neq(0,0)$ und $f(0,0)=0$. Zeigen Sie, dass

(a) die Funktion $f$ stetig in $(0,0)$ ist,

(b) jede Richtungsableitung $d_u f(0,0)$ (für $u\in\mathbb{R}^2$ mit $\|u\|_2=1$) existiert, und

(c) die Funktion $f$ nicht differenzierbar in $(0,0)$ ist.

Hausübung

Aufgabe H5.1 (6 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x, y) = x^2 + y^2$ gleich $(2x\ 2y)$ ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$.

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Fläche $z = f(x, y)$ an der Stelle $(1, 1)$, wenn $f(x, y) = e^x \cdot y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H5.2 (6 Punkte)

(a) Es sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \text{ und } x \neq 0\}$. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die so definiert ist: $f(x, y) = e^x - 1$, wenn $(x, y) \in M$ und $f(x, y) = 0$, wenn $(x, y) \notin M$. Man zeige, dass die Richtungsableitung $d_u f(0, 0)$ existiert, wobei $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \{(x, y) \mid x + y > 0\} \to \mathbb{R} : f(x, y) = \log(x + y)$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung $d_u f(1, 0)$, wobei $u = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

Aufgabe H5.3 (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, wenn $(x, y) \neq (0, 0)$ und $f(0, 0) = 0$. Beweisen Sie, dass die Richtungsableitung $d_u f(0, 0)$ existiert für alle $u \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\|_2 = 1$, aber die Funktion $f$ ist nicht stetig in $(0, 0)$.