Analysis II für M, LaG/M, Ph
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
12.11.2010

Gruppenübung

Aufgabe G4.1
Es seien X, Y endlich-dimensionale normierte Vektorräume. Zeigen Sie, dass jede lineare Abbildung $A : X \to Y$ Lipschitz-stetig ist. D.h. es gibt eine Konstante $L > 0$, so dass

$$\|Ax - Ay\|_Y \le L\|x - y\|_X, \qquad \text{für alle } x, y \in X.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\|Ax\|_Y \le C\|x\|$ für alle $x \in X$, für eine geeignete Norm $\|\cdot\|$ auf X.

Aufgabe G4.2
Es sei $\mathbb{N}$ ausgestattet mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik, d.h. $d(n,m) = |n - m|$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Geben Sie alle stetigen Funktionen von $(\mathbb{N}, d)$ nach $\mathbb{R}$ an.

Aufgabe G4.3
(a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Ist f stetig?

(b) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, so dass die partiellen Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,0)$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(0,y)$ stetige Funktionen sind, die Funktion f aber in $(0,0)$ unstetig ist.

Hausübung

Aufgabe H4.1 (6 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{\sin(x)y^2}{x^2 + y^4}$$

(a) Ist die Funktion f stetig?

(b) Ist sie stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar, d.h. gibt es eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F_{|\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} = f$?

(c) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin(x)y^4}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Aufgabe H4.2 (6 Punkte)
Es sei

$$C^1([0,1]) := \{f \in C([0,1]) : f \text{ ist differenzierbar in } (0,1) \text{ und } f' \text{ ist stetig fortsetzbar auf } [0,1]\}$$

versehen mit

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{C^1}$ eine Norm ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : C^1([0,1]) \to C([0,1])$, $T(f) = f'$ linear und stetig ist, falls der Raum $C([0,1])$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ normiert wird. Vergleichen Sie hierzu auch G3.3.

Aufgabe H4.3 (6 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{y} & : \quad y \neq 0 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktion. Für $c \in \mathbb{R}$ ist die Höhenlinie zur Höhe c gegeben durch

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}.$$

Ist die Funktion stetig im Punkt $(0,0)$? Welchen Hinweis geben die Höhenlinien?
Hinweis: Die Höhenlinien sind Kreise.