Analysis II für M, LaG/M, Ph
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
05.11.2010

Gruppenübung

Aufgabe G3.1

(a) Berechnen Sie den Limes der Folgen $x_n = (\frac{5n^2}{n^3+n}, -\frac{1}{n}, 1)$ und $y_n = (2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{n}{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, in $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_{\max})$; wobei $\|(a,b)\|_{\max} = \max\{|a|,|b|\}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Gegeben sei ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$. Wir betrachten die Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die so definiert ist

$$d(x,y) = \|x-y\|, \quad x, y \in X.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion d eine Metrik auf X ist, und dass $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x,y)$ für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe G3.2

(a) Gegeben sei ein metrischer Raum (X, p) und $a, b, c, d \in X$. Zeigen Sie, dass

$$|p(a,b) - p(c,d)| \leq p(a,c) + p(b,d).$$

Hinweis. Beweisen Sie durch die Fallunterscheidung: $p(a,b) \leq p(c,d)$ und $p(c,d) < p(a,b)$.

(b) Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Wir betrachten die Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die so definiert ist: $d(x,y) = 0$ falls $x = y$ und $d(x,y) = 1$ falls $x \neq y$. Zeigen Sie, dass diese Funktion d eine Metrik auf X ist und dass jede Menge $A \subseteq X$ offen ist. (Diese Metrik heißt triviale Metrik auf X.)

Aufgabe G3.3

Wir betrachten den Vektorraum

$$P([0,1]) = \{p : [0,1] \to \mathbb{R} \mid p \text{ ist eine Polynomfunktion}\}$$

und wir definieren $\|p\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |p(x)|$ für alle $p \in C([0,1])$. Betrachten Sie die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $p_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Gegeben, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $P([0,1])$ ist, zeigen Sie, dass $p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} 0$ und doch $p_n' \overset{\|\cdot\|_\infty}{\not\to} 0$; wobei p' die Ableitung von p ist.

Bemerkung. Diese Aufgabe bedeutet, dass die Funktion

$$T : (P([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (P([0,1]), \|\cdot\|_\infty), \ T(p) = p' = \text{die Ableitung von } p$$

nicht stetig ist.

Hausübung

Aufgabe H3.1 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Limes der Folgen $x_n = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$ und $y_n = (\frac{n}{n^2+1}, (1+\frac{1}{n})^n)$, $n \in \mathbb{N}$, in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\max})$; wobei $\|(a,b)\|_{\max} = \max\{|a|, |b|\}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass, wenn man die Norm $|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$, $a, b \in \mathbb{R}$ statt der Norm $\|\cdot\|_{\max}$ benutzt, die Limites der oben genannten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleich bleiben.

Hinweis. Benutzen Sie T3.3: Gegeben sei ein Vektorraum V und zwei Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ auf V, für die es $M_1, M_2 > 0$ gibt, sodass

$$M_1 \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M_2 \cdot \|x\|_1,$$

für alle $x \in V$. Zeigen Sie, dass für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ und für alle $x \in V$ gilt:

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x \quad \text{genau wenn} \quad x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x.$$

Aufgabe H3.2 (6 Punkte)

(a) Gegeben sei ein metrischer Raum (X,d) und abgeschlossene Mengen B_i, $i \in I$. Zeigen Sie, dass die Menge $B = \cap_{i\in I} B_i$ auch abgeschlossen ist.

(b) Gegeben sei ein metrischer Raum (X,d) und abgeschlossene Mengen $B_1, \ldots, B_n$. Zeigen Sie, dass die Menge $B = \cup_{k=1}^n B_k$ auch abgeschlossen ist.

Hinweis. Eine Menge $B \subseteq X$ ist abgeschlossen genau wenn die Menge $X \setminus B$ offen ist. Benutzen Sie (b) und (c) von T3.2:

- Gegeben sei ein metrischer Raum (X,d) und offene Mengen A_i, $i \in I$. Zeigen Sie, dass die Menge $A = \cup_{i\in I} A_i$ auch offen ist.
- Gegeben sei ein metrischer Raum (X,d) und offene Mengen $A_1, \ldots, A_n$. Zeigen Sie, dass die Menge $A = \cap_{k=1}^n A_k$ auch offen ist.

Aufgabe H3.3 (6 Punkte)

Wir betrachten den Vektorraum

$$C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$$

und wir definieren

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \text{und} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x$$

für alle $f \in C([0,1])$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ Normen auf $C([a,b])$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $M > 0$ gibt, sodass

$$\|f\|_1 \leq M \cdot \|f\|_\infty,$$

für alle $f \in C([0,1])$.

(c) Zeigen Sie, dass es kein $K > 0$ gibt, sodass

$$\|f\|_\infty \leq K \cdot \|f\|_1,$$

für alle $f \in C([0,1])$.

Hinweis. Bestimmen Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $C([0,1])$, für die $\int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x \longrightarrow 0$ gilt, aber $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen die Null-Funktion.