Analysis II für M, LaG/M, Ph
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
29.10.2010

Gruppenübung

Aufgabe G2.1

(a) Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und in $(0,1)$ differenzierbar. Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe G2.2 (Integrationsregeln)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\text{(a)} \quad \int x\sin(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \cosh^2(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(c)} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(d)} \int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe G2.3 (Partialbruchzerlegung)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}$.

Bestimmen Sie Koeffizienten $A, B, C \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x) = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2} \quad (*)$ gilt.

Benutzen Sie nun die Darstellung $(*)$, um das Integral $\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ zu berechnen.

Hausübung

Aufgabe H2.1 (6 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \ (x \neq 1), \qquad \int \frac{e^{2x}-2}{2e^{-x}+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_1^e \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe H2.2 (6 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

$$(a) \quad \int_0^{\pi/2} \cos(x)/\sqrt{\sin(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad (b) \quad \int_0^\infty x/(x^2+1)^3\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe H2.3 (6 Punkte)
Wir definieren die periodische Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $H(x) := x - [x] - \frac{1}{2}$, falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $H(x) = 0$ sonst. Hier bezeichnet $[x]$ für $x \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl, die kleiner als x ist.
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Ist $f : [1,n] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{2}\left(f(1)+f(n)\right) + \int_1^n f(x) + H(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\int_k^{k+1} 1 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe partieller Integration. Wählen Sie hierbei die “richtige” Stammfunktion für 1.