Analysis II für M, LaG/M, Ph
1. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
22.10.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1.1

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegung $Z_n = \{\frac{k}{2^n} \mid k = 0, 1, \dots, 2^n\}$ des Intervalls $[0,1]$ und die Funktion $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die so definiert ist: $\varphi_n(0) = 0$ und $\varphi_n(x) = (\frac{k}{2^n})^2$; wobei k die einzige natürliche Zahl ist, sodass $x \in (\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, wenn $0 < x \leq 1$;

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx = \frac{1}{6} \cdot (1 + \frac{1}{2^n}) \cdot (2 + \frac{1}{2^n})$$

gilt.

Hinweis. Es gilt $\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

(b) Zeigen Sie dass die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ konvergiert.

(c) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 x^2 dx$ ohne die Benutzung des Theorems 31.8 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung).

Aufgabe G1.2 (Korollar 30.14.)

(a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf I gibt mit $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ und $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_\infty < \infty$. Zeigen Sie, dass f sprungstetig ist.

(b) Sei $f : I \to \mathbb{K}$ eine sprungstetige Funktion. Zeigen Sie, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Treppenfunktion $\varphi_k : I \to \mathbb{K}$ gibt mit

$$|f(x) - \varphi_k(x)| \leq \frac{1}{2^k}, \quad \text{für alle } x \in I.$$

(c) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine sprungstetige Funktion. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf I gibt mit $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ und $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_\infty < \infty$.

Hinweis. Nehmen Sie $f_1 = \varphi_1$ und jedes f_{k+1} als die Differenz zweier Funktionen der Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von (b).

Aufgabe G1.3

(a) Sei $g : \mathbb{R} \to [a,b]$ eine differenzierbare Funktion und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

differenzierbar ist und $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $F(x) = \int_4^{x^2} \frac{1}{\log(t)}\mathrm{d}t$, $x \in [2,3]$.

Hausübung

Aufgabe H1.1 (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie dass $|\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{y+1}| \leq |x-y|$, für alle $x, y \geq 0$.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegung $P_n = \{\frac{k}{2^n} \mid k = 0, 1, \ldots, 2^n\}$ des Intervalls $[0,1]$ und die Funktion $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die so definiert ist: $\varphi_n(0) = 1$ und $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{(\frac{k}{2^n}) + 1}$; wobei k die einzige natürliche Zahl ist, sodass $x \in (\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, wenn $0 < x \leq 1$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \log(2).$$

Hinweis. Nehmen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \geq 0$. Was ist der Wert des Integrals $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$?

Aufgabe H1.2 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $F(x) = \int_{-x^2}^{x^3} e^{t^2}\mathrm{d}t$, $x \in [0,1]$.

(b) Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leq 100$. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [0,2]$ gibt, sodass $f(\xi) \leq 50$.

Hinweis. Benutzen Sie die Bemerkung 31.6.

Aufgabe H1.3 (6 Punkte)

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen auf einem abgeschlossen Intervall I, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Zeigen Sie, dass

$$\int_I f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n.$$

(b) Wir definieren $x_1 = 0$, $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2}$ für jedes $n \geq 2$. (Es gilt, dass $x_n \to \frac{\pi^2}{6}$.) Wir betrachten die Funktion $f : [0, \frac{\pi^2}{6}] \to \mathbb{R}$, die auf jedem Intervall $(x_n, x_{n+1}]$ gleich $1/n$ ist und $f(0) = f(\frac{\pi^2}{6}) = 0$. Wir betrachten auch die Funktionen $f_n : [0, \frac{\pi^2}{6}] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, die so definiert sind: $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ wenn $x \in (x_n, x_{n+1}]$, $f_n(x) = f(\frac{\pi^2}{6}) = 0$ wenn $x \notin (x_n, x_{n+1}]$.

i. Zeigen Sie, dass es $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ für jedes $x \in [0, \frac{\pi^2}{6}]$ gilt.

   Hinweis. Beweisen Sie es durch die Fallunterscheidung: $x \in \{0, \frac{\pi^2}{6}\}$ und $x \in (x_n, x_{n+1}]$ für ein $n \geq 1$.

ii. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

   Hinweis. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ beweisen Sie, dass für alle $x \in (0, x_{N+1}]$ $f(x) = \sum_{k=1}^{N} f_k(x)$. Wie groß ist die Zahl $|f(x) - \sum_{k=1}^{N} f(x)|$ wenn $x \notin (0, x_{N+1}]$?

iii. Finden Sie eine Folge $(a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen, sodass $\int_0^{\frac{\pi^2}{6}} f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.