Analysis II für M, LaG/M, Ph
13. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
4.2.2011

Aufgaben

Aufgabe T13.1
Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Viertelkreises mit dem Radius $r > 0$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes in der Ebene.

Aufgabe T13.2
Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$ ein grüner Bereich. Ferner erfülle $u \in C^2(M \times \mathbb{R})$ die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} \Delta_x u - u_{tt} &= 0 \quad \text{in} \quad M \times \mathbb{R}, \\ u_t &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial M \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie: Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$E(t) := \int_M \left(u_t(x,t)^2 + \|\nabla_x u(x,t)\|^2 \right) \mathrm{d}x$$

konstant. (Hierbei beziehen sich $\Delta_x := \partial_1^2 + \partial_2^2$ und ∇_x auf die Ortsvariable $x \in M$).

Anleitung:

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes, dass für $f, g \in C^2(M)$ gilt:

$$\int_M \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, \mathrm{d}x = \int_{\partial M} f \langle \vec{n}, \nabla g \rangle \, \mathrm{d}S - \int_M f \Delta g \, \mathrm{d}x$$

(Hierbei ist $\vec{n}$ die äußere Normale an M).

b) Zeigen Sie, dass $\frac{dE}{dt} = 0$ gilt.

Aufgabe T13.3
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gebiets G aus G13.3 mit Hilfe des Greenschen Satzes.