Analysis II für M, LaG/M, Ph
12. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
28.1.2011

Aufgaben

Aufgabe T12.1
Gegeben sei der Kreisringsektor

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ und } 9 \leq x^2 + y^2 \leq 81\}.$$

Es sei σ die Polarkoordinatenabbildung. Geben Sie eine Menge B an, so dass $\sigma(B) = K$ gilt. Berechnen Sie den Flächeninhalt von K und den Schwerpunkt (x_S, y_S), der durch

$$x_S := \frac{1}{\mu(K)} \int_K x \, \mathrm{d}(x, y)$$
$$y_S := \frac{1}{\mu(K)} \int_K y \, \mathrm{d}(x, y)$$

definiert ist.

Aufgabe T12.2 (**Cantor Mengen**)
Es sei $\alpha \in]0,1]$. Wir definieren nun rekursiv eine Folge von Mengen $C_n^\alpha \subset [0,1]$ welche jeweils aus der Vereinigung von 2^n abgeschlossenen disjunkten Intervallen besteht. Es sei $C_0^\alpha = [0,1]$. C_{n+1}^α entsteht aus C_n^α, indem man zu jedem Teilintervall $[a,b]$ aus C_n^α das offene Intervall $]\frac{a+b}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3^{n+1}}, \frac{a+b}{2} + \frac{\alpha}{2\cdot 3^{n+1}}[$ der Länge $\frac{\alpha}{3^{n+1}}$ herausnimmt. Z.B ist also

$$C_1 = C_0 \setminus \left]\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}, \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right[= \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\cdot 3}, 1\right]$$

Die Menge $C^\alpha := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n^\alpha$ wird modifizierte Cantormenge genannt.

(a) Zeigen sie, dass C^α abgeschlossen und $[0,1] \setminus C^\alpha$ dicht in $[0,1]$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass C^α nur für $\alpha = 1$ Jordan messbar ist und bestimmen Sie in diesem Fall das Jordan Maß von C^1.

(c) Für die folgenden Teilaufgaben sei nun $\alpha = 1$. In diesem Fall nennt man die Menge $C := C^1$ Cantormenge. Zeigen Sie, dass sich jedes Element aus C für genau eine Folge $(a_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ in der Form $\sum_{n=1}^\infty \frac{2a_n}{3^n}$ schreiben läßt.
Hinweis: Benutzen Sie, dass sich jedes $x \in [0,1]$ triadisch darstellen läßt. D.h. jedes $x \in [0,1]$ läßt sich durch eine Reihe $x = \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{3^n}$ mit $b_n \in \{0,1,2\}$ darstellen.

(d) Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi : C \to [0,1]$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{2a_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{2^n}$ surjektiv, monoton steigend aber nicht injektiv ist.

Hinweise: (i) Jeder Punkt in $[0,1]$ hat eine binäre Darstellung. (ii) Sei $a, b \in C$ mit $a < b$ in der Darstellung aus (c). Betrachten Sie den kleinsten Koefiizienten $a_k, b_k \in \{0,1\}$, so dass $b_k \neq a_k$ ist. (iii) Berechne $\phi(\frac{1}{3})$ und $\phi(\frac{2}{3})$.

(e) Zu $x \in [0,1] \setminus C$ sei $\alpha(x) = \inf\{y \in C \,|\, (y,x) \subset [0,1] \setminus C\}$. Zeigen Sie, dass die sogenannte Cantorfunktion $\psi : [0,1] \to [0,1]$,

$$x \mapsto \begin{cases} \phi(x) & \text{falls } x \in C \\ \phi(\alpha(x)) & \text{falls } x \in [0,1] \setminus C \end{cases}$$

stetig und monoton steigend ist. (Sie ist sogar in allen Punkten $x \notin C$ differenzierbar und es gilt $\psi'(x) = 0$.)
Hinweis: Aus der Monotonie und der Surjektivität folgt schon die Stetigkeit.