Analysis II für M, LaG/M, Ph
11. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
21.01.2011

Aufgaben

Aufgabe T11.1
Wir betrachten die Funktion $f : I = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} :, f(x,y) = xy$.

(a) Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung Z_n von I in n^2 Teilintervalle an.

(b) Geben Sie zur Zerlegung Z_n zwei Treppenfunktionen $\underline{f}_n, \overline{f}_n$ mit $\underline{f}_n \leq f \leq \overline{f}_n$ an.

(c) Benutzen Sie die Treppenfunktionen aus (b) um zu zeigen, dass f auf I Riemannintegrierbar ist.

Aufgabe T11.2
Seien ein abgeschlossen Intervall I von $\mathbb{R}^n$ und Z eine Menge von abgeschlossenen Intervallen. Die Menge Z heißt Rechteckzerlegung des I genau wenn:

(a) für alle $J \in Z$ gilt $\emptyset \neq J \subseteq I$;

(b) $I = \cup_{J \in Z} J$;

(c) für alle $J_1, J_2 \in Z$ und für alle $x \in J_1 \cap J_2$ (wenn solche x gibt) ist x nicht innere Punkt von $J_1 \cap J_2$.

Die Menge Z heißt Gitter-Zerlegung des $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ genau wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ eine Zerlegung Z_i des $[a_i, b_i]$ gibt, sodass

$$Z = \{[c_1, d_1] \times \cdots \times [c_n, d_n] \mid \text{jedes } [c_i, d_i] \text{ ist ein Interval von } Z_i\}.$$

Zeigen Sie, dass jede Gitter-Zerlegung eine Rechteckzerlegung ist. Ist jede Rechteckzerlegung eine Gitter-Zerlegung?

Aufgabe T11.3 (Satz von Fubini nicht anwendbar)
Gegeben seien das Intervall $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3} & \text{falls } (x,y) \in I \setminus \{(0,0)\}; \\ 0 & \text{falls } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f in $(0,0)$ nicht stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \text{ und } \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = -\frac{1}{2}$$

gilt. Erläutern Sie, warum die Funktion f nicht Riemann-integrierbar sein kann. Hinweis: Benutzen Sie bei Teil (b) die Substitution $u = x + y$.