Analysis II für M, LaG/M, Ph
10. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
14.1.2011

Aufgaben

Aufgabe T10.1

(a) Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\gamma} : J \to \mathbb{R}^n$ zwei stetig differenzierbare Kurven. Die Kurven heißen äquivalent, falls es eine monoton wachsende, stetig differenzierbare, bijektive Funktion $\varphi : J \to I$ gibt, so dass $\gamma(\varphi(t)) = \tilde{\gamma}(t)$ für alle $t \in J$ gilt. $\tilde{\gamma}$ heißt auch Umparametrisierung von γ.

Zeigen Sie, dass sich jede stetig differenzierbare Kurve nach der Weglänge parametrisieren lässt, d.h. zu jeder Kurve γ gibt es eine Umparametrisierung $\tilde{\gamma}$, so dass $|\tilde{\gamma}'| = 1$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral unabhängig von der gewählten Parametrisierung ist. Genauer: Ist $f \circ \gamma$ stetig und $\tilde{\gamma}$ eine Umparametrisierung von γ, so gilt

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\tilde{\gamma}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe T10.2

Beweisen Sie: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine n-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, wenn M in $\mathbb{R}^n$ offen ist.