Analysis II für M, LaG/M, Ph
9. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
17.12.2010

Aufgaben

Aufgabe T9.1

(a) Man zeige, dass durch $x^3 + y^2 - 2xy = 0$ in einer Umgebung von $(x, y) = (1, 1)$ eine differenzierbare Funktion $x = \varphi(y)$ mit $\varphi(1) = 1$ implizit definiert ist.

(b) Man berechne die Ableitung $\varphi'(1)$.

(c) Zeigen Sie, dass φ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von $y = 1$ ist und bestimmen Sie $\varphi''(1)$.

(d) Kann man den Satz über implizite Funktionen benutzen, um die Gleichung $x^3 + y^2 - 2xy = 0$ nach y (d.h. $y = \psi(x)$, wobei ψ differenzierbar) um $(1, 1)$ aufzulösen?

Aufgabe T9.2

Sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die so definiert ist $f(x, y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$. Zeigen Sie, dass f lokal umkehrbar um alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist. Gegeben sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und g stetig partiell differenzierbar, die um $f(x_0, y_0)$ definiert ist, und $g(z, w) = (x, y) \Longleftrightarrow (z, w) = f(x, y)$, bestimmen Sie die Jakobi-Matrix von g in alle (z, w) um $f(x_0, y_0)$.

Aufgabe T9.3

Wir betrachten das Vektorfeld $F(x, y, z) = ((x + y)^3, \sin(xy), xyz)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla \cdot F$ und $\nabla \times F$.

(b) Gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sodass $F = \operatorname{grad} f$?

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral von F über die $\gamma(t) = (1, t, t^2)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.